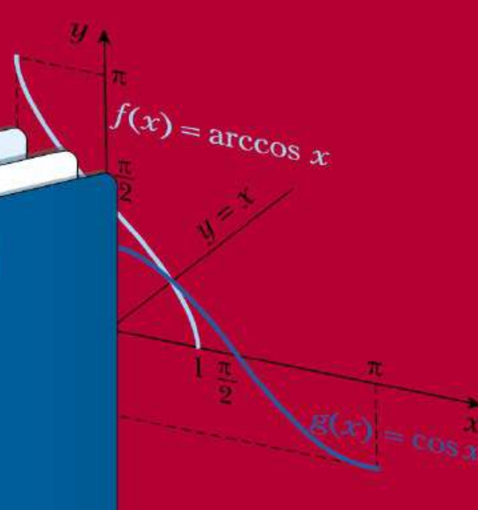
А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. Б. Полонский
М. С. Якир

10 класс

Алгебра и начала математического анализа



Базовый уровень

вентана граф

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. Б. Полонский
М. С. Якир

Математика:
алгебра и начала математического анализа, геометрия

Алгебра и начала математического анализа

10 класс

Базовый уровень

Учебное пособие

под редакцией В. Е. Подольского

4-е издание, стереотипное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

От авторов

Дорогие десятиклассники!

Вы начинаете изучать новый школьный предмет – **алгебру и начала математического анализа**.

Этот предмет необычайно важен. Наверное, нет сегодня такой области науки, в которой не применялись бы достижения этого раздела математики. Физики и химики, астрономы и биологи, географы и экономисты, даже языковеды и историки используют «математический инструмент».

Алгебра и начала математического анализа – полезный и очень интересный предмет, который развивает аналитическое и логическое мышление, исследовательские навыки, математическую культуру, сообразительность. Надеемся, что скоро вы в этом убедитесь, и этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках. Ознакомьтесь с его структурой.

Учебник разделён на пять глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным шрифтом**. Также обращайте внимание на слова, напечатанные *курсивом*.

В этой книге вы познакомитесь с целым рядом важных теорем. К некоторым из них приведены полные доказательства. В тех случаях, когда доказательства выходят за пределы рассматриваемого курса, мы ограничились только формулировками теорем. Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно из рубрики «Задачи высокой сложности»). Свои знания можно проверить, решая задачи в тестовой форме из рубрики «Проверьте себя».

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите знать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный там, непростой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

○ Простые задачи

○○ Задачи средней сложности

✧ Сложные задачи

✵ Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

◄ Окончание доказательства теоремы, решения задачи

23.16 Задания, рекомендованные для домашней работы

8.3 Задания, рекомендованные для устной работы

Глава 1. Повторение и расширение сведений о функции

В этой главе вы повторите основные сведения о функции; узнаете, что называют наибольшим и наименьшим значениями функции на множестве, какие функции называют чётными, а какие — нечётными; ознакомитесь со свойствами графиков чётных и нечётных функций; узнаете, какую функцию называют обратимой, какие функции называют взаимно обратными, каково взаимное расположение графиков взаимно обратных функций; повторите, как, используя график функции $y = f(x)$, можно построить графики функций $y = f(x + a)$, $y = f(x) + b$, $y = kf(x)$; узнаете, какое уравнение и какое неравенство называют соответственно следствием другого уравнения и другого неравенства; ознакомитесь с методом интервалов для решения неравенств.

§ 1. Наибольшее и наименьшее значения функции. Чётные и нечётные функции

Перед изучением этого параграфа рекомендуем обновить в памяти содержание п. 17–20 на с. 331–332 и решить упражнения 1.37–1.46.

В 7 классе вы ознакомились с понятием функции и при изучении многих разделов курса алгебры неоднократно обращались к этому понятию. То, что функции отводится столь значимое место, не случайно, ведь функция служит математической моделью многих реальных процессов.

Вы держите в руках учебник «Алгебра и начала математического анализа». В названии появилось новое словосочетание — «начала математического анализа». Что же скрывается за этим названием? Ответ очень прост — математический анализ изучает функции. С этого года вы начинаете знакомство с элементами математического анализа: будете рассматривать новые классы функций, изучать их свойства, овладевать методами исследования функций.

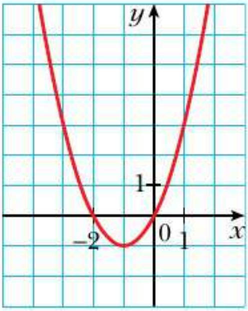
Вам знаком ряд характеристик функции, которые помогают изучать её свойства: *область определения*, *область значений*, *нули*, *промежутки знакопостоянства*, *промежутки возрастания и убывания*.

Например, для функции $y = x^2 + 2x$, график которой изображён на рисунке 1.1, имеем:

- область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- область значений: $E(y) = [-1; +\infty)$;

* нули: числа -2 и 0;
* промежутки знакопостоянства: функция принимает положительные значения на каждом из промежутков $(-\infty; -2)$ и $(0; +\infty)$, а отрицательные значения — на промежутке $(-2; 0)$;
* промежутки возрастания и убывания: функция убывает на промежутке $(-\infty; -1]$ и возрастает на промежутке $[-1; +\infty)$.

Рис. 1.1



Приведённый выше список далеко не исчерпывает те свойства, которые целесообразно изучать при исследовании функции. Рассмотрим новые понятия, помогающие более полно охарактеризовать функцию.

Определение

Число $f(x_0)$ называют наибольшим значением функции f на множестве $M \subset D(f)$, если существует такое число $x_0 \in M$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Обозначают: $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Определение

Число $f(x_0)$ называют наименьшим значением функции f на множестве $M \subset D(f)$, если существует такое число $x_0 \in M$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Обозначают: $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ и множества $M = [0; 4]$ (рис. 1.2) имеем: $\min\limits_{[0;4]} \sqrt{x} = f(0) = 0$, $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2$.

Для функции $f(x) = |x|$ и множества $M = [-1; 2]$ (рис. 1.3) имеем: $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 2$.

Если c — некоторое число и $f(x) = c$ для любого $x \in M$, то число c является и наибольшим, и наименьшим значениями функции f на множестве M.

Не любая функция на заданном множестве $M \subset D(f)$ имеет наименьшее или наибольшее значение. Так, для функции $f(x) = x^2$ имеем: $\min\limits_{\boldsymbol{R}} f(x) = 0$. Наибольшего значения на множестве $\boldsymbol{R}$ эта функция не имеет (рис. 1.4).

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множестве $M = (0; +\infty)$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения (рис. 1.5).

Рис. 1.2

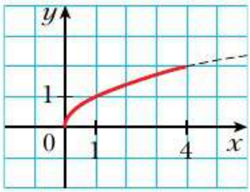


Рис. 1.3

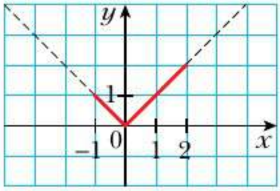


Рис. 1.4

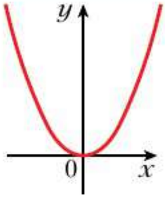
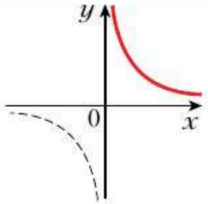


Рис. 1.5



Часто для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции удобно пользоваться такими очевидными фактами:

- *если функция f возрастает на промежутке $[a; b]$, то* $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ (рис. 1.6);
- *если функция f убывает на промежутке $[a; b]$, то* $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ (рис. 1.7).

Рис. 1.6

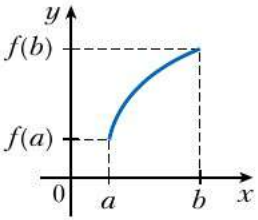
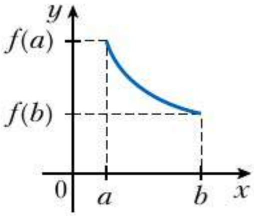


Рис. 1.7



Определение

Функцию f называют чётной, если для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Определение

Функцию f называют нечётной, если для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Например, функция $f(x) = x^2$ чётная, а функция $g(x) = x^3$ нечётная. Действительно, $D(f) = \boldsymbol{R}$, $D(g) = \boldsymbol{R}$. Для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняются равенства $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ и $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Выполнение равенства $f(-x) = f(x)$ или равенства $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$ означает, что область определения функции f является симметричной относительно начала координат, т. е. обладает следующим свойством: если $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$.

Из приведённых определений следует, что если область определения функции не является симметричной относительно начала координат, то эта функция не может быть чётной (нечётной).

Например, областью определения функции $y = \frac{1}{x-1}$ является множество $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, которое не является симметричным относительно начала координат. Поэтому указанная функция не является ни чётной, ни нечётной.

Пример 1. Докажите, что функция $f(x) = x^3 - x$ является нечётной.

Решение. Поскольку $D(f) = \boldsymbol{R}$, то область определения функции f симметрична относительно начала координат.

Для любого $x \in D(f)$ имеем: $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$.

Следовательно, функция f нечётная. ◄

Пример 2. Исследуйте на чётность функцию $f(x) = \frac{|x-2|}{1+x} + \frac{|x+2|}{1-x}$.

Решение. Имеем: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Следовательно, область определения функции f симметрична относительно начала координат.

Для любого $x \in D(f)$ имеем:

$$f(-x) = \frac{|-x-2|}{1+(-x)} + \frac{|-x+2|}{1-(-x)} = \frac{|x+2|}{1-x} + \frac{|x-2|}{1+x} = f(x).$$

Следовательно, функция f чётная. ◄

Теорема 1.1

Ось ординат является осью симметрии графика чётной функции.

Доказательство

Пусть $M(a; b)$ – произвольная точка графика чётной функции. Для доказательства теоремы достаточно показать, что точка $M_1(-a; b)$ также принадлежит её графику.

Если точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции f, то $f(a) = b$. Поскольку функция f чётная, то $f(-a) = f(a) = b$. Это значит, что точка $M_1(-a; b)$ также принадлежит графику функции f (рис. 1.8). ◄

Теорема 1.2

Начало координат является центром симметрии графика нечётной функции.

Утверждение теоремы проиллюстрировано на рисунке 1.9.

Рис. 1.8

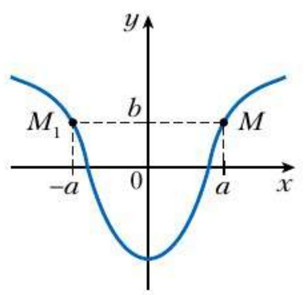
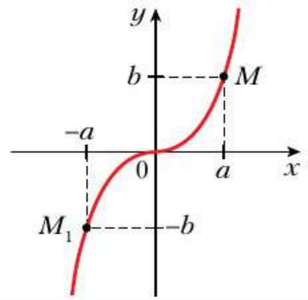


Рис. 1.9



1. Какое число называют наибольшим (наименьшим) значением функции на множестве?

2. Как обозначают наибольшее (наименьшее) значение функции f на множестве M?

3. Какую функцию называют чётной (нечётной)?

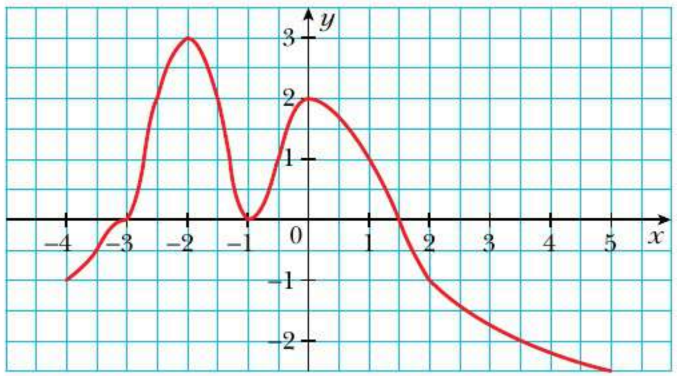
4. Каким свойством обладает график чётной (нечётной) функции?

Упражнения

1.1. На рисунке 1.10 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-4; 5]$. Пользуясь графиком, найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке:

1) $[1; 2]$; 2) $[-2,5; 1]$; 3) $[-2,5; 3,5]$.

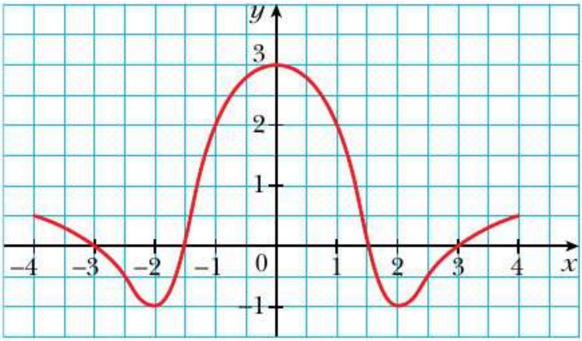
Рис. 1.10



1.2. На рисунке 1.11 изображён график функции $y = g(x)$, определённой на промежутке $[-4; 4]$. Пользуясь графиком, найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке:

1) $[-3; -2]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $[-3; 1]$.

Рис. 1.11



1.3. Известно, что $f(7) = -16$. Найдите $f(-7)$, если функция f является:

1) чётной; 2) нечётной.

1.4. Функция f чётная. Может ли выполняться равенство:

1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5) \cdot f(-5) = -2$; 3) $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 0$?

1.5. Функция f чётная. Обязательно ли выполняется равенство $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 1$?

1.6. Функция f нечётная. Может ли выполняться равенство:

1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2) \cdot f(-2) = 3$; 3) $\dfrac{f(-2)}{f(2)} = 0$?

1.7. Является ли чётной функция, заданная формулой $y = x^2$, если её область определения — множество:

1) $[-9; 9]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $[-6; 6)$; 4) $(-\infty; 4]$?

1.8. На промежутке $[2; 5]$ найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = -\dfrac{10}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{20}{x}$.

1.9. Найдите:

1) $\max\limits_{[1;2]}(-x^2 + 6x)$; 2) $\min\limits_{[1;4]}(-x^2 + 6x)$; 3) $\max\limits_{[4;5]}(-x^2 + 6x)$.

1.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 + 2x - 8$ на промежутке:

1) $[-5; -2]$; 2) $[-5; 1]$; 3) $[0; 3]$.

1.11. Докажите, что является чётной функция:

1) $f(x) = -5x^4$;
2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$;
3) $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}$;
4) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}$.

1.12. Докажите, что является чётной функция:

1) $f(x) = x^6$;
2) $f(x) = -3x^2 + |x| - 1$;
3) $f(x) = \sqrt{5-x^2}$;
4) $f(x) = \dfrac{|5x-2| + |5x+2|}{x^2-1}$.

1.13. Докажите, что является нечётной функция:

1) $f(x) = 4x^7$;
2) $f(x) = 2x - 3x^5$;
3) $f(x) = x|x|$;
4) $f(x) = (5-x)^5 - (5+x)^5$;
5) $g(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}$;
6) $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-x+1} + \dfrac{3x-2}{x^2+x+1}$.

1.14. Докажите, что является нечётной функция:

1) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$;
2) $f(x) = (x^3+x)(x^4-x^2)$;
3) $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$;
4) $g(x) = \dfrac{|4x-1| - |4x+1|}{x^4-1}$.

1.15. Исследуйте на чётность функцию:

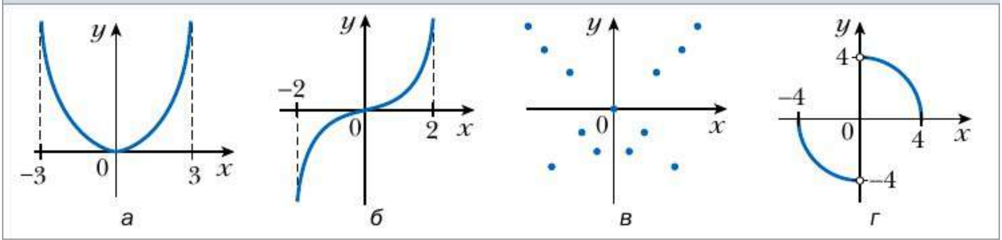
1) $f(x) = \dfrac{x}{x}$;
2) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-1}$;
3) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-1}$;
4) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$;
5) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$;
6) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{x^3-x}$.

1.16. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = x^2 + 2x - 4$;
2) $f(x) = \dfrac{6x^3}{x^2-9}$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2+6x}{2x+12}$.

1.17. Чётной или нечётной является функция, график которой изображён на рисунке 1.12?

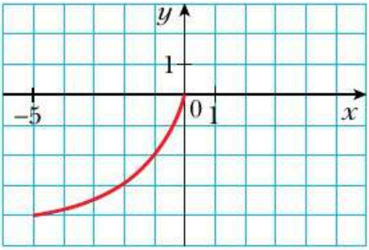
Рис. 1.12



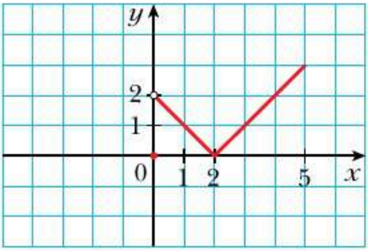
1.18. На рисунке 1.13 изображена часть графика функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-5; 5]$. Достройте график этой функции, если она является:

1) чётной; 2) нечётной.

Рис. 1.13



а



б

1.19. Ломаная $ABCD$, где $A(0; 0)$, $B(2; -2)$, $C(3; 4)$, $D(6; 1)$, является частью графика функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-6; 6]$. Постройте график этой функции, если она является:

1) чётной; 2) нечётной.

1.20. О функции f, определённой на множестве $\boldsymbol{R}$, известно, что $f(x) = x^2 - 4x$ при $x \geqslant 0$. Постройте график этой функции, если она является:

1) чётной; 2) нечётной.

1.21. О функции f, определённой на множестве $\boldsymbol{R}$, известно, что $f(x) = -0{,}5x^2$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $f(x) = -\dfrac{4}{x}$ при $x > 2$. Постройте график этой функции, если она является:

1) чётной; 2) нечётной.

1.22. При каких значениях c наибольшее значение[1] функции $y = -0{,}6x^2 + 18x + c$ равно 2?

1.23. При каких значениях c наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 12x + c$ равно -3?

1.24. Сумма двух чисел равна 8. Найдите:

1) какое наибольшее значение может принимать произведение этих чисел;

2) какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов этих чисел.

---

[1] Если не указано множество, то наибольшее и наименьшее значения функции f ищут на $D(f)$.

1.25. Участок земли прямоугольной формы огородили забором длиной 200 м. Какую наибольшую площадь может иметь этот участок?

1.26. Нечётная функция f такова, что $0 \in D(f)$. Найдите $f(0)$.

1.27. Чётная функция f имеет 7 нулей. Найдите $f(0)$.

1.28. Область определения функции f симметрична относительно начала координат. Докажите, что функция $g(x) = f(x) + f(-x)$ чётная, а функция $h(x) = f(x) - f(-x)$ нечётная.

1.29. Областью определения чётных функций f и g является множество M. Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x) \cdot g(x)$.

1.30. Областью определения чётной функции f и нечётной функции g является множество M. Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x) \cdot g(x)$.

1.31. Областью определения нечётных функций f и g является множество M. Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x) \cdot g(x)$.

1.32. Существует ли функция, определённая на множестве $\boldsymbol{R}$, которая одновременно является:

1) нечётной и возрастающей;
2) нечётной и убывающей;
3) чётной и возрастающей?

1.33. Чётная функция f, определённая на множестве $\boldsymbol{R}$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Определите, возрастает или убывает функция f на промежутке $(-\infty; 0]$.

1.34. Нечётная функция f, определённая на множестве $\boldsymbol{R}$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Определите, возрастает или убывает функция f на промежутке $(-\infty; 0]$.

1.35. Функция f является чётной и $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 2$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 5$. Найдите $\min\limits_{[-3;\,-1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;\,-1]} f(x)$.

1.36. Функция f является нечётной и $\min\limits_{[2;\,5]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[2;\,5]} f(x) = 3$. Найдите $\min\limits_{[-5;\,-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;\,-2]} f(x)$.

Упражнения для повторения

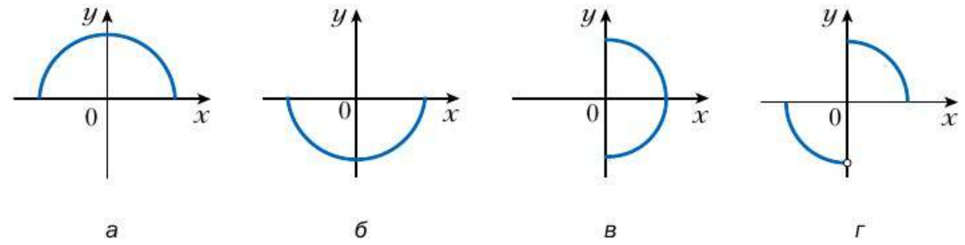
1.37. Функция задана формулой $f(x) = -3x^2 + 2x$.

1) Найдите: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-2)$.

2) Найдите значения аргумента, при которых значение функции f равно: 0; –1; –56.

1.38. Укажите на рисунке 1.14 фигуру, которая не может служить графиком функции.

Рис. 1.14



1.39. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{9}{x+4}$;

2) $f(x) = \dfrac{x-6}{4}$;

3) $f(x) = \sqrt{x-7}$;

4) $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{-x-1}}$;

5) $f(x) = \sqrt{x^2+6x-7}$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x}$;

7) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$;

8) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{12+4x-x^2}}$;

9) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$;

10) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{-x}$.

1.40. Найдите нули функции:

1) $f(x) = 0{,}4x - 8$;

2) $g(x) = 28 + 3x - x^2$;

3) $h(x) = \sqrt{x+4}$;

4) $\varphi(x) = \dfrac{x^2+x-30}{x+5}$;

5) $f(x) = x^3 - 9x$;

6) $g(x) = x^2 + 4$.

1.41. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = -7x + 3$;

2) $y = x^2 - 8x + 16$;

3) $y = \dfrac{6}{4-x}$;

4) $y = -x^2 - 1$;

5) $y = 3x^2 - 7x + 4$;

6) $y = -2x^2 + 3x - 1$.

1.42. Найдите область значений функции:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 2$;

2) $f(x) = 7 - x^2$;

3) $f(x) = -6$;

4) $f(x) = |x| - 3$;

5) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$;

6) $f(x) = x^2 + 4x + 8$.

1.43. Верно ли утверждение:

1) каждая прямая, параллельная оси ординат, пересекает график любой функции в одной точке;

2) прямая, параллельная оси абсцисс, может не пересекать график функции;

3) прямая, параллельная оси ординат, не может пересекать график функции более чем в одной точке?

1.44. Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x^2 - 2x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Пользуясь построенным графиком, укажите нули функции, её промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и промежутки убывания.

1.45. При каком наименьшем целом значении m функция $y = 7mx + 6 - 20x$ является возрастающей?

1.46. При каких значениях b функция $y = 3x^2 - bx + 1$ возрастает на множестве $[3; +\infty)$?

Готовимся к изучению новой темы

1.47. График какой функции получим, если график функции $y = x^2$ параллельно перенесём:

1) на 5 единиц вверх;

2) на 8 единиц вправо;

3) на 10 единиц вниз;

4) на 6 единиц влево.

1.48. Постройте график функции $y = x^2$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = x^2 - 2$; 2) $y = (x + 3)^2$; 3) $y = (x - 3)^2 + 1$.

1.49. Постройте график функции $y = \sqrt{x}$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x} - 3$; 2) $y = \sqrt{x - 3}$; 3) $y = \sqrt{x - 2} + 1$.

1.50. Постройте график функции:

1) $y = 0{,}5\sqrt{x}$; 2) $y = -2\sqrt{x - 2}$.

1.51. Решите графически уравнение:

1) $2\sqrt{x} = 3 - x$; 2) $\dfrac{2}{x - 2} = x - 3$.

Повторите содержание п. 25 на с. 334.

§ 2. Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований

В 9 классе вы научились с помощью графика функции $y = f(x)$ строить графики функций $y = f(x + a)$, $y = f(x) + b$, $y = kf(x)$.

Покажем, как можно построить график функции $y = f(kx)$, если известен график функции $y = f(x)$.

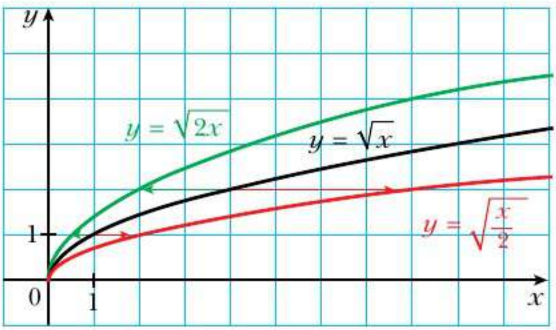
Рассмотрим случай, когда $k > 0$. Если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ принадлежит графику функции $y = f(kx)$. Действительно, при $x = \frac{x_0}{k}$ имеем: $f(kx) = f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y_0$.

Следовательно, каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = f(x)$ соответствует единственная точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ графика функции $y = f(kx)$. Аналогично каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = f(kx)$ является соответствующей единственной точке $(kx_1; y_1)$ графика функции $y = f(x)$.

Поэтому ***график функции y = f (kx), где k > 0, можно получить, заменив каждую точку графика функции y = f (x) на точку с той же ординатой и абсциссой, разделённой на k***.

На рисунке 2.1 показано, как можно использовать это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{2x}$ и $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

Рис. 2.1



Говорят, что график функции $y = f(kx)$ получен из графика функции $y = f(x)$ в результате **сжатия в k раз к оси ординат**, если $k > 1$, или в результате **растяжения в $\frac{1}{k}$ раз от оси ординат**, если $0 < k < 1$.

Так, график функции $y = \sqrt{2x}$ получен в результате сжатия графика функции $y = \sqrt{x}$ в 2 раза к оси ординат, а график функции $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ — в результате растяжения графика функции $y = \sqrt{x}$ в 2 раза от оси ординат.

Покажем, как построить график функции $y = f(-x)$, если известен график функции $y = f(x)$.

Если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(-x)$. Действительно, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

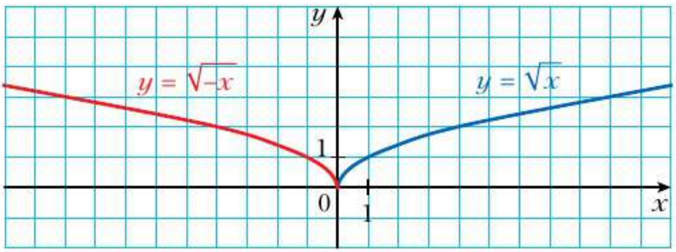
Следовательно, каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = f(x)$ соответствует единственная точка $(-x_0; y_0)$ графика функции $y = f(-x)$. Аналогично можно показать, что каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = f(-x)$ является соответствующей единственной точке $(-x_1; y_1)$ графика функции $y = f(x)$.

Поэтому ***график функции $y = f(-x)$ можно получить, отобразив график функции $y = f(x)$ симметрично относительно оси ординат***.

Такое преобразование графика функции $y = f(x)$ называют **симметрией относительно оси ординат**.

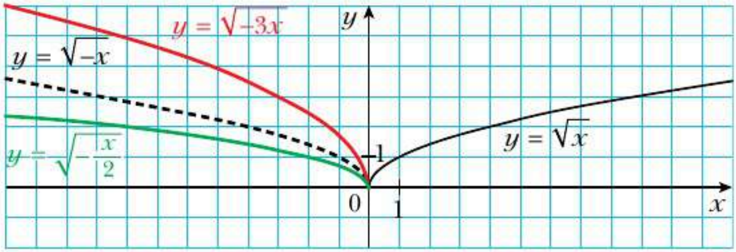
На рисунке 2.2 показано, как с помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ построен график функции $y = \sqrt{-x}$.

Рис. 2.2



С учётом сказанного становится понятным, что правило построения графика функции $y = f(kx)$, где $k < 0$, такое же, как и для случая $k > 0$. Например, на рисунке 2.3 показано, как с помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ можно построить графики функций $y = \sqrt{-3x}$ и $y = \sqrt{-\frac{x}{2}}$.

Рис. 2.3



Пример 1. Постройте график функции $y = \sqrt{3x-2}$.
Решение. Схема построения имеет следующий вид (рис. 2.4):

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{Вправо на 2 ед.}} y = \sqrt{x-2} \xrightarrow{\text{Сжатие в 3 раза к оси ординат}} y = \sqrt{3x-2}$$

Если данную функцию представить в виде $y = \sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$, то построение графика можно вести и по следующей схеме (рис. 2.5):

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{Сжатие в 3 раза к оси ординат}} y = \sqrt{3x} \xrightarrow{\text{Вправо на } \frac{2}{3} \text{ ед.}} y = \sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$$

Рис. 2.4

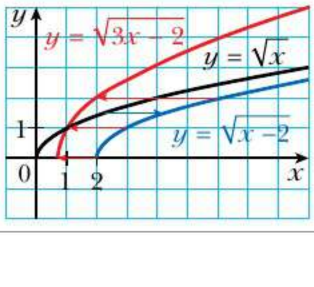
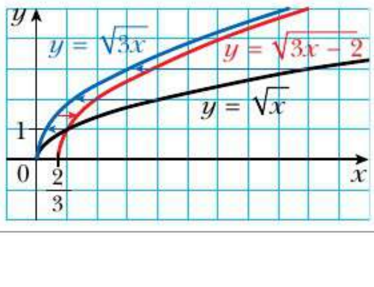


Рис. 2.5

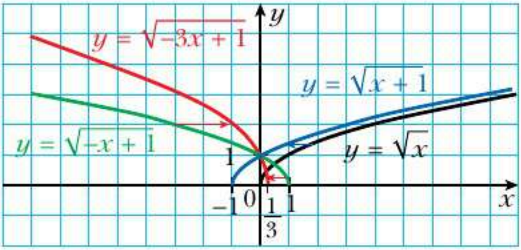


Пример 2. Постройте график функции $y = \sqrt{1 - 3x}$.

Решение. Построение графика можно вести по следующей схеме (рис. 2.6):

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{Влево на 1 ед.}} y = \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{Симметрия относительно оси ординат}} y = \sqrt{-x+1} \xrightarrow{\text{Сжатие в 3 раза к оси ординат}} y = \sqrt{-3x+1}$$

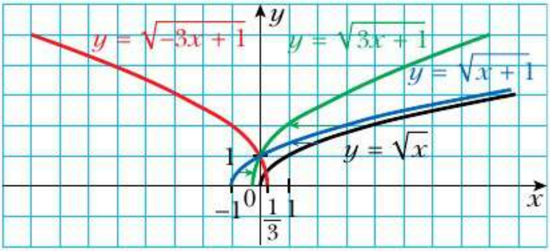
Рис. 2.6



Заметим, что возможны и другие схемы решения этой задачи, например такая (рис. 2.7):

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{Влево на 1 ед.}} y = \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{Сжатие в 3 раза к оси ординат}} y = \sqrt{3x+1} \xrightarrow{\text{Симметрия относительно оси ординат}} y = \sqrt{-3x+1}$$

Рис. 2.7



Как можно построить график функции $y = f(kx)$, используя график функции $y = f(x)$, если $k > 0$? $k = -1$? $k < 0$?

Упражнения

2.1. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{\frac{x}{5}}$; 2) $y = \sqrt{-2x}$.

2.2. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{5x}$; 2) $y = \sqrt{-\frac{x}{3}}$.

2.3. Постройте график функции:

1) $y = (2x - 1)^2 - 4$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 - 4$.

2.4. Постройте график функции:

1) $y = (3x + 2)^2 - 1$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}x + 1\right)^2 - 1$.

2.5. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{4x+1}$; 2) $y = \frac{1}{1-4x}$.

2.6. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{3x+1}$; 2) $y = \frac{1}{1-3x}$.

2.7. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{2x - 1}$; 2) $y = \sqrt{3 - 4x}$; 3) $y = \sqrt{\frac{1}{2}x + 2}$.

2.8. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{3x + 1}$; 2) $y = \sqrt{5 - 2x}$.

2.9. Постройте график функции:

1) $y = 2\sqrt{3x - 1} + 1$; 2) $y = 3(2x + 1)^2 - 2$.

2.10. Постройте график функции:

1) $y = 4\sqrt{2x - 3} - 1$; 2) $y = 2(3x - 1)^2 + 1$.

Упражнения для повторения

2.11. Цену на товар повысили на 25 %. На сколько процентов надо снизить новую цену, чтобы она вернулась к первоначальному уровню?

2.12. Было 200 г 8%-го раствора соли. Через некоторое время 40 г воды испарили. Каким стало процентное содержание соли в растворе?

Готовимся к изучению новой темы

2.13. Выразите:

1) из равенства $y = \dfrac{x+7}{3}$ переменную x через переменную y;

2) из равенства $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{5} - 1$ переменную x через переменную y.

2.14. Графики каких функций произвольная горизонтальная прямая пересекает не более чем в одной точке:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = 2$; 3) $y = -x^2$; 4) $y = \dfrac{6}{x-1}$?

§ 3. Обратная функция

На рисунках 3.1 и 3.2 изображены графики функций f и g.

Любая горизонтальная прямая пересекает график функции f не более чем в одной точке. Это означает, что каждому числу $y_0 \in E(f)$ соответствует единственное число $x_0 \in D(f)$ такое, что $y_0 = f(x_0)$. Функция g таким свойством не обладает. Действительно, из рисунка 3.2 видно, что значению y_0 соответствуют два значения аргумента x_1 и x_2 такие, что $y_0 = g(x_1)$ и $y_0 = g(x_2)$.

Рис. 3.1

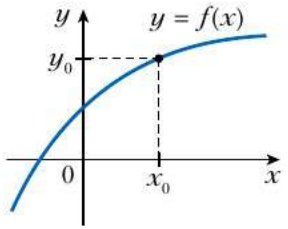
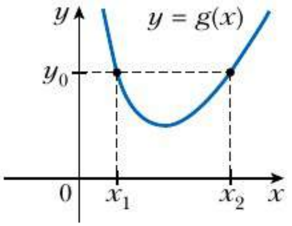


Рис. 3.2



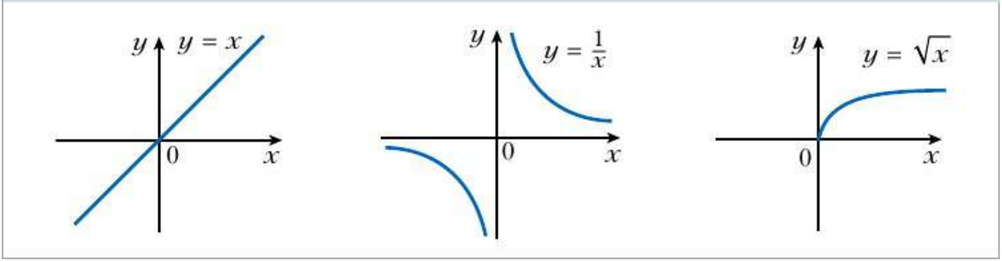
Определение

Функцию $y = f(x)$ называют обратимой, если для любого $y_0 \in E(f)$ существует единственное число $x_0 \in D(f)$ такое, что $y_0 = f(x_0)$.

Функция f (см. рис. 3.1) является обратимой. Функция g (см. рис. 3.2) не является обратимой.

Функции $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ являются примерами обратимых функций (рис. 3.3).

Рис. 3.3



Функция $y = x^2$ не является обратимой. Например, значению функции $y_0 = 4$ соответствуют два значения аргумента $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$.

Теорема 3.1

Если функция является возрастающей (убывающей), то она обратима.

Доказательство

Предположим, что существует возрастающая функция f, не являющаяся обратимой. Тогда найдётся $y_0 \in E(f)$, для которого существуют x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) такие, что $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Вместе с тем функция f возрастающая, и из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. Получили противоречие.

Аналогично рассматривается случай, когда функция f является убывающей. ◄

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную таблично.

x	5	6	7
y	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функция f является обратимой.

Поменяем строки таблицы местами и рассмотрим функцию $y = g(x)$, заданную полученной таблицей.

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
y	5	6	7

Функции f и g связаны следующими свойствами:

1) $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5}$ и $g(\sqrt{5}) = 5$;

$f(6) = \sqrt{6}$ и $g(\sqrt{6}) = 6$;

$f(7) = \sqrt{7}$ и $g(\sqrt{7}) = 7$.

Эти равенства показывают, что если $f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$, и если $g(x_1) = y_1$, то $f(y_1) = x_1$.

Определение

Функции f и g называют взаимно обратными, если:
1) $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$;
2) для любого $x_0 \in D(f)$ из равенства $f(x_0) = y_0$ следует, что $g(y_0) = x_0$, то есть $g(f(x_0)) = x_0$.

Также говорят, что функция g является **обратной** к функции f, а функция f — **обратной** к функции g.

Рассмотренные выше функции, заданные таблично, являются примерами взаимно обратных функций.

Второе условие в определении взаимно обратных функций можно заменить на такое: для любого $x_0 \in D(g)$ из равенства $g(x_0) = y_0$ следует, что $f(y_0) = x_0$, то есть $f(g(x_0)) = x_0$.

Пример. Докажите, что функции $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = \frac{x+1}{2}$ являются взаимно обратными.

Решение. Имеем: $D(f) = E(g) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = D(g) = \boldsymbol{R}$.

Пусть $f(x_0) = y_0$, то есть $y_0 = 2x_0 - 1$. Докажем, что $g(y_0) = x_0$.

Имеем: $g(y_0) = \frac{y_0 + 1}{2} = \frac{2x_0 - 1 + 1}{2} = x_0$. ◄

Если функция f не является обратимой, то не существует функции, обратной к ней. Любая обратимая функция имеет обратную.

Пусть f — обратимая функция, а функция g — ей обратная. Из определения взаимно обратных функций следует, что если f — это правило, позволяющее по значению переменной x из $D(f)$ найти соответствующее значение переменной y из $E(f)$, то g — это правило, позволяющее по значению переменной y найти соответствующее значение переменной x.

В рассмотренном выше примере было доказано, что для функции $y = 2x - 1$ обратной является функция $y = \frac{x+1}{2}$. Однако решение этой задачи не показывает, как по данной функции найти ей обратную. Покажем, как это можно сделать, на примере функции $y = 2x - 1$.

Функция $y = 2x - 1$ возрастающая. Следовательно, она является обратимой.

Чтобы задать функцию, обратную данной, надо указать правило, позволяющее по каждому значению переменной y найти такое значение переменной x, что $y = 2x - 1$. Для этого в записанном равенстве выразим переменную x через переменную y.

Имеем: $2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$.

Последнее равенство задаёт функцию с аргументом y и зависимой переменной x.

Традиционно независимую переменную обозначают буквой x, а зависимую — буквой y. Придерживаясь таких обозначений, можно сказать, что мы получили функцию, которая задаётся формулой $y = \frac{x+1}{2}$. Она и является искомой.

Рассмотрим ещё один пример. Функция $y = x^2$ не является обратимой. Вместе с тем эта функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Следовательно, функция $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, является обратимой. Также принято говорить, что функция $y = x^2$ является **обратимой на множестве** $[0; +\infty)$. Найдём функцию, обратную к функции f.

Имеем: $y = x^2$, где $x \in [0; +\infty)$. Отсюда $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$. Равенство $x = \sqrt{y}$ задаёт функцию с аргументом y и зависимой переменной x.

Воспользовавшись традиционными обозначениями, получим функцию $y = \sqrt{x}$, обратную к f.

Теорема 3.2

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Доказательство

Пусть $M(a; b)$ — произвольная точка, принадлежащая графику обратимой функции $y = f(x)$. Тогда $b = f(a)$. Если функция g является обратной к функции f, то $g(b) = a$, то есть точка $N(b; a)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$.

Покажем, что точки M и N симметричны относительно прямой $y = x$.

Если $a = b$, то точки M и N совпадают и принадлежат прямой $y = x$, а значит, симметричны относительно этой прямой.

При $a \neq b$ имеем: $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 3.4), то есть точка O равноудалена от концов отрезка MN, а следовательно, принадлежит серединному перпендикуляру отрезка MN. Середина K отрезка MN имеет координаты $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$. Поскольку абсцисса и ордината точки K равны, то эта точка принадлежит прямой $y = x$. Следовательно, прямая OK, то есть прямая $y = x$, является серединным перпендикуляром отрезка MN. А это означает, что точки M и N симметричны относительно прямой $y = x$. ◄

Доказанную теорему иллюстрируют графики взаимно обратных функций, которые рассматривались выше (рис. 3.5).

Рис. 3.4

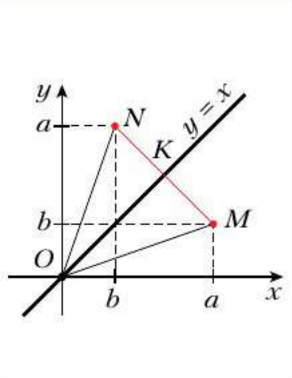
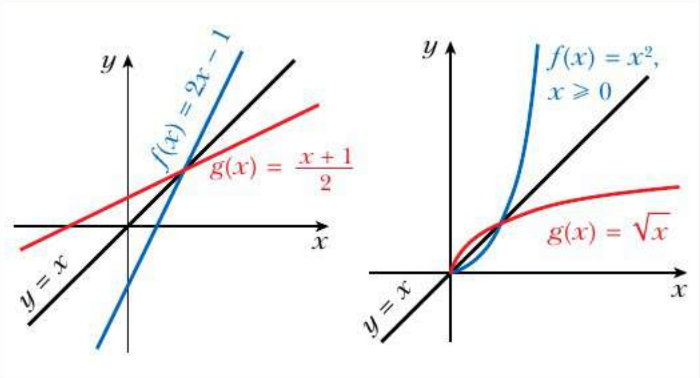


Рис. 3.5



Теорема 3.3

Если функция f является возрастающей (убывающей), то обратная к ней функция g является также возрастающей (убывающей).

Доказательство

Предположим, что функция f возрастающая и при этом обратная к ней функция g не является возрастающей. Тогда найдутся такие $y_1 \in D(g)$ и $y_2 \in D(g)$, что из неравенства $y_1 < y_2$ будет следовать неравенство $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Пусть $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$. Получаем, что $x_1 \geqslant x_2$. Так как функция f возрастающая, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то есть $y_1 \geqslant y_2$. Получили противоречие.

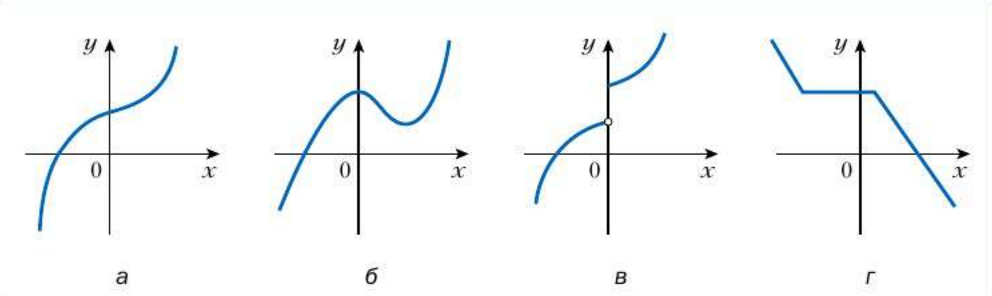
Для убывающей функции рассуждения аналогичны. ◄

1. Какую функцию называют обратимой?
2. Сформулируйте теорему об обратимости возрастающей (убывающей) функции.
3. Какие две функции называют взаимно обратными?
4. Как расположены графики взаимно обратных функций?
5. Какой является функция, обратная к возрастающей функции? К убывающей функции?

Упражнения

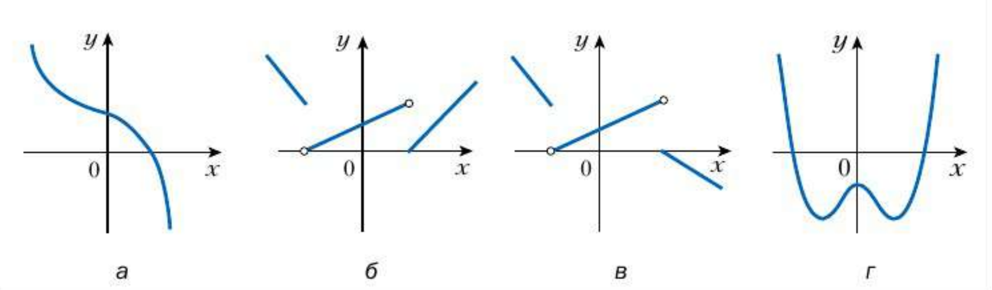
3.1. Какие из функций, графики которых изображены на рисунке 3.6, являются обратимыми?

Рис. 3.6



3.2. Какие из функций, графики которых изображены на рисунке 3.7, являются обратимыми?

Рис. 3.7



3.3. Докажите, что данная функция не является обратимой:

1) $y = |x|$; 2) $y = \dfrac{1}{x^4}$; 3) $y = 5$.

3.4. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{1}{2x+1}$; 4) $y = \frac{1}{3}x + 4$.

3.5. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = 0{,}2x + 3$; 2) $y = \frac{1}{x-1}$; 3) $y = \frac{4}{x+2}$; 4) $y = 4x - 5$.

3.6. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = 2\sqrt{x} - 1$; 2) $y = x^2$, $D(y) = (-\infty; 0]$; 3) $y = \frac{1-x}{1+x}$.

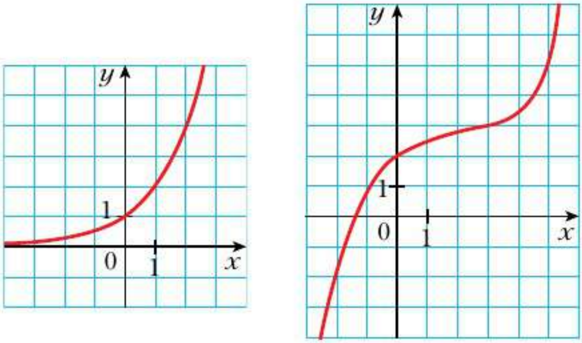
3.7. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = \frac{x+2}{x}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 3) $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $D(y) = [2; +\infty)$.

3.8. Пользуясь графиком функции $y = f(x)$, изображённым на рисунке 3.8, постройте график функции, обратной к функции f.

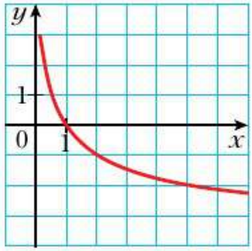
3.9. Пользуясь графиком функции $y = f(x)$, изображённым на рисунке 3.9, постройте график функции, обратной к функции f.

Рис. 3.8



а б

Рис. 3.9



3.10. Постройте в одной системе координат график данной функции и график функции, обратной к ней:

1) $y = -0{,}5x + 2$; 2) $y = \sqrt{x+1}$; 3) $y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 2x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

3.11. Постройте в одной системе координат график данной функции и график функции, обратной к ней:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = x^2 - 4$, если $x \geqslant 0$; 3) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

3.12. Докажите, что функция, обратная к линейной функции $y = kx + b$ при $k \neq 0$, также является линейной.

3.13. Докажите, что функция, обратная к нечётной функции, также является нечётной.

Упражнения для повторения

3.14. Через первую трубу бассейн можно наполнить водой за 9 ч, а через вторую – за 12 ч. Сначала 3 ч была открыта первая труба, потом её закрыли, но открыли вторую. За сколько часов был наполнен бассейн?

3.15. Две бригады, работая вместе, вспахали поле за 8 ч. За сколько часов может вспахать поле каждая бригада, работая самостоятельно, если одной бригаде для этого требуется на 12 ч больше, чем другой?

Готовимся к изучению новой темы

3.16. Равны ли множества A и B, если:
1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = [-1; 2)$, $B = (-1; 2]$;
3) A – множество корней уравнения $|x| = x$, $B = [0; +\infty)$?

3.17. Запишите все подмножества множества $\{-1, 0, 2\}$.

3.18. Какие из следующих множеств являются подмножествами множества $A = [-3; +\infty)$:
1) $B = [2; +\infty)$; 2) $C = [-3,5; +\infty)$; 3) $D = (-1; 2]$?

Повторите содержание п. 6 на с. 327.

§ 4. Равносильные уравнения и неравенства

Пусть заданы две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и поставлена задача найти множество значений аргумента x, при которых значения функций f и g равны. В таком случае говорят, что требуется решить уравнение $f(x) = g(x)$.

Определение

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество значений переменной x, при которых имеют смысл обе части уравнения.

Из определения следует, что областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ является множество $D(f) \cap D(g)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Областью определения уравнения $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$ является множество $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Областью определения уравнения $\frac{x + 3}{|x| - x} = 0$ является множество $(-\infty; 0)$.

Несмотря на то что уравнение $x^2 = -2$ не имеет корней, его областью определения является множество действительных чисел, то есть множество $\boldsymbol{R}$.

Каждый корень уравнения принадлежит его области определения. Этот факт иллюстрирует диаграмма Эйлера (рис. 4.1). Другими словами, для того чтобы значение переменной x было корнем уравнения $f(x) = g(x)$, необходимо выполнение условия $x \in D(f) \cap D(g)$. Например, не решая уравнения $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$, можно утверждать, что число 0 не является его корнем.

Рис. 4.1

Рассмотрим уравнения $x^2 = 4$ и $|x| = 2$. Каждое из них имеет одни и те же корни: числа -2 и 2. В таких случаях говорят, что уравнения $x^2 = 4$ и $|x| = 2$ **равносильны**.

Определение

Два уравнения называют равносильными, если множества их корней равны.

Из определения следует, что для доказательства равносильности двух уравнений достаточно показать, что каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Приведём примеры пар равносильных уравнений:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ и } 2x = 0;$$

$$x^2 = 1 \text{ и } (x - 1)(x + 1) = 0;$$

$$(x - 1)^{100} = 0 \text{ и } (x - 1)^{1000} = 0.$$

Множество корней каждого из уравнений $x^2 = -5$ и $|x| = -3$ является пустым, то есть множества корней этих уравнений равны. Следовательно, по определению эти уравнения равносильны.

Если любой корень уравнения $f_1(x) = g_1(x)$, принадлежащий множеству M, является корнем уравнения $f_2(x) = g_2(x)$, а любой корень уравнения $f_2(x) = g_2(x)$, принадлежащий множеству M, является корнем уравнения $f_1(x) = g_1(x)$, то такие два уравнения называют **равносильными на множестве** M.

Например, уравнения $x^2 - 1 = 0$ и $x + 1 = 0$ равносильны на множестве $(-\infty; 0)$.

Решая уравнение, важно знать, с помощью каких преобразований можно заменить данное уравнение равносильным.

Напомним теоремы, знакомые вам из курса алгебры 8 класса.

Теорема 4.1

Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 4.2

Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Обратите внимание, что из теорем 4.1 и 4.2 **не следует**, что если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же выражение с переменной или обе части уравнения умножить на одно и то же выражение с переменной, то получим уравнение, равносильное данному.

Так, если к обеим частям уравнения $x^2 = 25$ прибавить дробь $\frac{1}{5-x}$, то получим уравнение $x^2 + \frac{1}{5-x} = 25 + \frac{1}{5-x}$, не являющееся равносильным данному. Действительно, число 5 является корнем уравнения $x^2 = 25$, но не является корнем полученного уравнения.

Определение

Если множество корней первого уравнения является подмножеством множества корней второго уравнения, то второе уравнение называют следствием первого уравнения.

Например, уравнение $x^2 = 25$ является следствием уравнения $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$. Убедитесь в этом самостоятельно.

Также говорят, что из уравнения $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ **следует** уравнение $x^2 = 25$.

Рис. 4.2

На рисунке 4.2 определение уравнения-следствия проиллюстрировано с помощью диаграммы Эйлера.

Поскольку пустое множество является подмножеством любого множества, то, например, следствием уравнения $x^2 = -5$ является любое уравнение с одной переменной x.

Заметим, что если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого.

Те корни полученного уравнения-следствия, которые не являются корнями данного уравнения, называют **посторонними корнями** данного уравнения.

Например, уравнение $x^2 = 1$ является следствием уравнения $x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 1$. Уравнение-следствие имеет два корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, а уравнение $x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 1$ имеет один корень — число 1. В этом случае корень -1 уравнения $x^2 = 1$ является посторонним корнем уравнения $x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 1$.

Решая уравнение, надо стараться построить цепочку равносильных уравнений, чтобы в конце получить уравнение, равносильное данному, корни которого легко найти.

Однако если при решении уравнения равносильность не была соблюдена и произошёл переход к уравнению-следствию, то полученные при этом посторонние корни, как правило, можно выявить с помощью проверки.

Например, решим уравнение $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$. Приравняв числитель дроби к нулю, получим уравнение $x^2 - 4 = 0$, корнями которого являются числа -2 и 2. Однако число -2 не принадлежит области определения данного уравнения, а число 2 удовлетворяет данному уравнению и является его единственным корнем.

Решая уравнение $\frac{x^2-4}{x+2}=0$, мы перешли к уравнению-следствию $x^2-4=0$, корни которого были проверены.

При решении уравнения важно понимать, на каком этапе была нарушена равносильность и что послужило этому причиной.

Так, при переходе от уравнения $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ к уравнению $x^2-4=0$ была расширена область определения данного уравнения. Таким образом, пренебрежение ограничением $x \neq -2$ как раз и привело к появлению постороннего корня -2.

Определение

Два неравенства называют равносильными, если множества их решений равны.

Приведём несколько примеров.

Неравенства $2x-1>0$ и $1-2x<0$ равносильны, так как промежуток $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ является множеством решений каждого из этих неравенств.

Неравенства $x^2 \leqslant 0$ и $|x| \leqslant 0$ равносильны. Действительно, каждое из них имеет единственное решение $x=0$.

Неравенства $x^2>-1$ и $|x|>-2$ равносильны, так как множеством решений каждого из них является множество $\boldsymbol{R}$.

Поскольку каждое из неравенств $|x|<-1$ и $0x<-3$ решений не имеет, то они также равносильны.

При решении уравнения мы стремимся заменить его другим, более простым уравнением, равносильным данному. По аналогичной схеме решают и неравенства, используя такие теоремы.

Теорема 4.3

Если к обеим частям неравенства прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 4.4

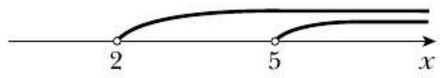
Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 4.5

Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Из теоремы 4.3 следует, что ***если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному***.

Рис. 4.3



Определение

Если множество решений первого неравенства является подмножеством множества решений второго неравенства, то второе неравенство называют следствием первого неравенства.

Например, неравенство $x > 2$ является следствием неравенства $x > 5$. Действительно, множество $(5; +\infty)$ является подмножеством множества $(2; +\infty)$ (рис. 4.3).

Поскольку пустое множество является подмножеством любого множества, то, например, следствием неравенства $|x| < 0$ является любое неравенство с одной переменной x.

1. Что называют областью определения уравнения $f(x) = g(x)$?
2. Какие уравнения называют равносильными?
3. С помощью каких преобразований уравнения можно получить уравнение, равносильное данному?
4. Какое уравнение называют следствием данного уравнения?
5. Какие неравенства называют равносильными?
6. С помощью каких преобразований неравенства можно получить неравенство, равносильное данному?
7. Какое неравенство называют следствием данного неравенства?

Упражнения

4.1. Равносильны ли уравнения:

1) $-2x = -6$ и $\frac{1}{3}x = 1$;

2) $x - 5 = 0$ и $x(x - 5) = 0$;

3) $\frac{6}{x} = 0$ и $x^2 = -4$;

4) $x + 1 = 1 + x$ и $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$;

5) $x^3 = 1$ и $|x| = 1$;

6) $x^{100} = 1$ и $x^{1000} = 1$;

7) $\frac{x}{x} = 1$ и $x = x$;

8) $x^2 + 2x + 1 = 0$ и $x + 1 = 0$;

9) $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$ и $x - 1 = 0$;

10) $\frac{x^2-9}{x+2} = 0$ и $x^2 - 9 = 0$?

4.2. Равносильны ли уравнения:

1) $x + 6 = 10$ и $2x - 1 = 7$;

2) $x^2 = x$ и $x = 1$;

3) $x^2 + 1 = 0$ и $\frac{3}{x-1} = 0$;

4) $\frac{x+1}{x+1} = 1$ и $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$;

5) $\frac{x-2}{x-2} = 0$ и $2x^2 + 3 = 0$;

6) $x^2 + 4x + 4 = 0$ и $\frac{x+2}{x-1} = 0$;

7) $\frac{x^2-9}{x-3} = 0$ и $x + 3 = 0$;

8) $\frac{x+1}{x+1} = 0$ и $\frac{x^2-1}{x^2-1} = 0$?

4.3. Составьте какое-нибудь уравнение, равносильное данному:

1) $|x| = 1$; 2) $x + 6 = x - 2$; 3) $\frac{x-1}{x-1} = 1$.

4.4. Будет ли уравнение, полученное в результате указанного преобразования, равносильным данному:

1) в уравнении $3(2x - 1) - 5(4x + 2) = 1$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые;

2) в уравнении $x^2 + \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-7} = 49$ разность $\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-7}$ заменить нулём;

3) в уравнении $\frac{x^2-1}{x-1} + 3x - 5 = 0$ сократить дробь;

4) обе части уравнения $x^3 = x$ разделить на x;

5) обе части уравнения $(x + 1)(x^2 + 4) = x^2 + 4$ разделить на $x^2 + 4$;

6) обе части уравнения $\frac{x^2}{x} = 2$ умножить на x;

7) обе части уравнения $2x + 1 = 5$ умножить на $x + 1$?

4.5. Равносильны ли неравенства:

1) $x + 3 > 6$ и $-4x < -12$;

2) $(x + 2)^2(x + 1) < 0$ и $x + 1 < 0$;

3) $(x + 2)^2(x + 1) \leqslant 0$ и $x + 1 \leqslant 0$;

4) $\frac{1}{x} < 1$ и $x > 1$;

5) $x^2 \geqslant x$ и $x \geqslant 1$;

6) $(x + 4)^2 < 0$ и $|x - 2| < 0$?

4.6. Равносильны ли неравенства:

1) $(x - 3)^2(x + 4) \leqslant 0$ и $x + 4 \leqslant 0$;

2) $(x - 3)^2(x + 4) < 0$ и $x + 4 < 0$;

3) $\frac{x-2}{x-4} > 0$ и $x - 2 > 0$;

4) $\sqrt{x} \leqslant 0$ и $x^4 \leqslant 0$?

4.7. Какое из двух уравнений является следствием другого:

1) $x^2 = x$ и $x = 1$;

2) $\frac{x}{x} = 1$ и $0x = 0$;

3) $|x| = 1$ и $x^3 = 1$;

4) $\frac{x^2}{x-6} = \frac{36}{x-6}$ и $x^2 = 36$;

5) $x^2 = 4$ и $x^2 - \frac{1}{x+2} = 4 - \frac{1}{x+2}$;

6) $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$ и $x^2 - 1 = 0$?

4.8. Какое из двух уравнений является следствием другого:

1) $\frac{x^2}{x} = 1$ и $x^2 = x$;

2) $x^2 + 1 = 1$ и $x(x - 1) = 0$;

3) $\frac{x^2}{x+8} = \frac{64}{x+8}$ и $x^2 = 64$;

4) $x^2 + \frac{1}{x+3} = 9 + \frac{1}{x+3}$ и $x^2 = 9$?

4.9. Какое из двух неравенств является следствием другого:

1) $x < -4$ и $x < 1$;

2) $x \geqslant 5$ и $x > 5$;

3) $x^2 < 0$ и $x < 0$?

4.10. Какое из двух неравенств является следствием другого:

1) $x^2 - 4 > 0$ и $x - 2 > 0$;

2) $x^2 \geqslant 0$ и $x > 0$?

4.11. Как может измениться (расшириться или сузиться) множество корней данного уравнения, если:

1) уравнение $(|x| + 3) f(x) = 2|x| + 6$ заменить уравнением $f(x) = 2$;

2) уравнение $\frac{f(x)}{x^2+1} = 0$ заменить уравнением $f(x) = 0$;

3) уравнение $(x + 1) f(x) = x + 1$ заменить уравнением $f(x) = 1$;

4) уравнение $\frac{f(x)}{x+1} = \frac{g(x)}{x+1}$ заменить уравнением $f(x) = g(x)$;

5) уравнение $f(x) = g(x)$ заменить уравнением $(x+1) f(x) = (x+1) g(x)$?

Готовимся к изучению новой темы

4.12. Решите неравенство:

1) $(x-5)^2 > 0$; 4) $(x-5)^2 \leqslant 0$; 7) $\dfrac{x+5}{x+5} > \dfrac{1}{2}$;

2) $(x-5)^2 \geqslant 0$; 5) $\left(\dfrac{x-5}{x+5}\right)^2 > 0$; 8) $\dfrac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$;

3) $(x-5)^2 < 0$; 6) $\left(\dfrac{x-5}{x+5}\right)^2 \geqslant 0$; 9) $\dfrac{x^2}{x^2+1} \geqslant 0$.

4.13. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

1) $x^2 + x - 6$; 2) $35 - 2x - x^2$; 3) $2x^2 + 9x - 18$.

Повторите содержание п. 12, 14, 15 на с. 329–330.

§ 5. Метод интервалов

На рисунке 5.1 изображён график некоторой функции f, у которой $D(f) = \boldsymbol{R}$ и нулями являются числа x_1, x_2 и x_3. Эти числа разбивают область определения функции на промежутки знакопостоянства $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

А всегда ли нули функции разбивают её область определения на промежутки знакопостоянства? Ответ на этот вопрос отрицательный. Для функции g, график которой изображён на рисунке 5.2, промежуток $(x_2; x_3)$ не является промежутком знакопостоянства. Действительно, если $x \in (x_2; x_0)$, то $g(x) > 0$, а если $x \in [x_0; x_3)$, то $g(x) < 0$.

Рис. 5.1

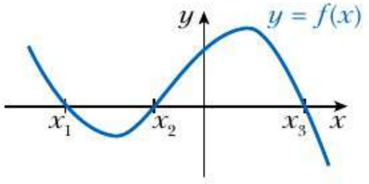
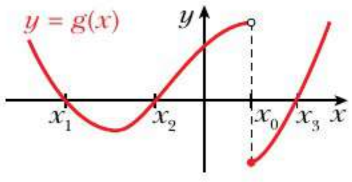


Рис. 5.2



Принципиальное различие между функциями f и g состоит в том, что графиком функции f является **непрерывная кривая**, а график функции g таким свойством не обладает. Говорят, что функция f **непрерывна в каждой точке области определения**, или **непрерывна на $D(f)$**. Функция g **в точке $x_0 \in D(g)$ имеет разрыв**.

Такое представление о непрерывной функции интуитивно понятно. Более детально с непрерывными функциями вы ознакомитесь в главе 5.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующая теорема.

Теорема 5.1

Если функция f непрерывна на некотором промежутке и не имеет на нём нулей, то она на этом промежутке сохраняет постоянный знак.

Например, функция $y = x^2 - 1$ непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ и не имеет на них нулей. Поэтому рассматриваемая функция на указанных промежутках сохраняет знак (рис. 5.3).

Теорема 5.1 является основой общего метода решения неравенств вида $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$, где f – функция, непрерывная на $D(f)$.

Разъясним этот метод на примере функции, график которой изображён на рисунке 5.1.

Представим себе, что с этого рисунка «исчезли» все точки графика функции f, за исключением точек A $(x_1; 0)$, B $(x_2; 0)$, C $(x_3; 0)$ (рис. 5.4). Каждый из промежутков $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ не содержит нулей функции f.

Рис. 5.3

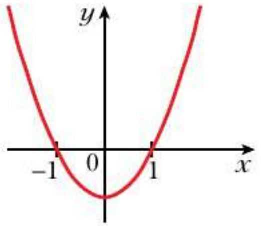
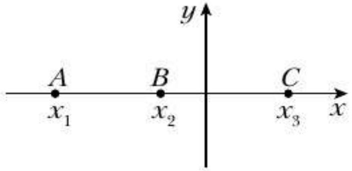


Рис. 5.4



Функция f непрерывна на этих промежутках. Следовательно, в силу теоремы 5.1 указанные промежутки являются промежутками знакопостоянства функции f.

Остаётся лишь выяснить, какой знак имеют значения функции f на этих промежутках. Это можно сделать с помощью «пробных точек».

Пусть, например, $a \in (-\infty; x_1)$ и $f(a) > 0$. Поскольку $(-\infty; x_1)$ – промежуток знакопостоянства функции, то для любого $x \in (-\infty; x_1)$ значение функции имеет тот же знак, что и $f(a)$, следовательно, выполняется неравенство $f(x) > 0$. Выбирая по одной точке на каждом промежутке знакопостоянства и находя значение функции в этой точке, можно определить знак функции на рассматриваемых промежутках.

Описанный метод решения неравенств называют **методом интервалов**.

Следующая теорема позволяет применять метод интервалов для неравенств вида $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ и $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены.

Теорема 5.2

Функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, непрерывна на $D(y)$.

Например, функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке множества $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, то есть на $D(y)$.

Пример 1. Решите неравенство $(x + 3)(x - 1)(x - 2) > 0$.

Решение. Числа –3, 1 и 2 являются нулями функции $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$, непрерывной на $D(f) = \boldsymbol{R}$. Поэтому эти числа разбивают множество $\boldsymbol{R}$ на промежутки знакопостоянства функции f: $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$ (рис. 5.5).

С помощью «пробных точек» определим знаки функции f на указанных промежутках.

Имеем:

$3 \in (2;\ +\infty)$, $f(3) > 0$, поэтому $f(x) > 0$ при любом $x \in (2;\ +\infty)$;

$\frac{3}{2} \in (1;\ 2)$, $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, поэтому $f(x) < 0$ при любом $x \in (1;\ 2)$;

$0 \in (-3;\ 1)$, $f(0) > 0$, поэтому $f(x) > 0$ при любом $x \in (-3;\ 1)$;

$-4 \in (-\infty;\ -3)$, $f(-4) < 0$, поэтому $f(x) < 0$ при любом $x \in (-\infty;\ -3)$.

Результаты исследования знака функции f показаны на рисунке 5.6.

Рис. 5.5

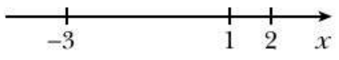
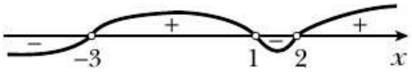


Рис. 5.6



Теперь можно записать ответ.

Ответ: $(-3;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$. ◄

Замечание. При оформлении решения неравенств исследование знака функции на промежутках можно проводить устно, фиксируя результаты в виде схемы, показанной на рисунке 5.6.

Пример 2. Решите неравенство $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0$.

Решение. Функция $f(x) = (x+1)(3-x)(x-2)^2$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Отметим нули функции f на координатной прямой (рис. 5.7). Они разбивают множество $D(f) = \boldsymbol{R}$ на промежутки знакопостоянства функции f.

Рис. 5.7

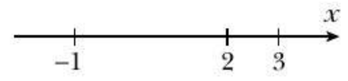
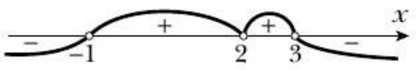


Рис. 5.8



Исследуем знак функции f на каждом из этих промежутков. Результат исследования показан на рисунке 5.8.

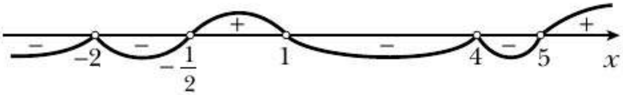
Ответ: $(-1; 2) \cup (2; 3)$. ◄

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} < 0$.

Решение. Областью определения функции $f(x) = \dfrac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$ является множество $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; 4\right) \cup (4; +\infty)$. Функция f непрерывна на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}; 4\right)$, $(4; +\infty)$. Поэтому нули -2, 1, 5 функции f разбивают $D(f)$ на следующие промежутки знакопостоянства: $(-\infty; -2)$, $\left(-2; -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$, $(1; 4)$, $(4; 5)$, $(5; +\infty)$.

Результат исследования знака функции f на каждом из этих промежутков показан на рисунке 5.9.

Рис. 5.9



Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$. ◄

Пример 4. Решите неравенство $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

Решение. Имеем: $\frac{2 + x + 10 - 5x - 4 + x^2}{(2-x)(2+x)} < 0$; $\frac{x^2 - 4x + 8}{(2-x)(2+x)} < 0$.

Областью определения функции $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{(2-x)(2+x)}$ является множество $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. Функция f нулей не имеет. Поскольку функция f непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$, то эти промежутки являются промежутками знакопостоянства.

На рисунке 5.10 показан результат исследования знака функции f на каждом из указанных промежутков.

Это неравенство можно решить иначе. Поскольку дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - 4x + 8$ отрицателен, а старший коэффициент положителен, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ имеем: $x^2 - 4x + 8 > 0$. Поэтому неравенство $\frac{x^2 - 4x + 8}{(2-x)(2+x)} < 0$ равносильно такому неравенству: $(2-x)(2+x) < 0$. Далее следует обратиться к рисунку 5.10.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. ◄

С помощью метода интервалов можно решать и нестрогое неравенство $f(x) \geqslant 0$ (либо $f(x) \leqslant 0$). Множество решений такого неравенства — это объединение множества решений неравенства $f(x) > 0$ (либо $f(x) < 0$) и множества корней уравнения $f(x) = 0$.

Пример 5. Решите неравенство $\frac{4x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x - 3} \geqslant 0$.

Решение. Советуем, если это возможно, многочлены, записанные в числителе и знаменателе дроби, раскладывать на множители. Тогда намного удобнее исследовать знак функции на промежутках знакопостоянства.

Имеем: $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} \geqslant 0$.

Устанавливаем (рис. 5.11), что множество $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ является множеством решений неравенства $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} > 0$.

Рис. 5.10

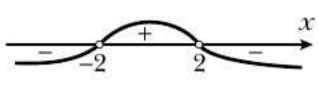
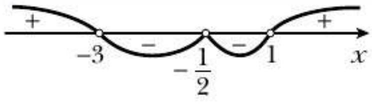


Рис. 5.11



Уравнение $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} = 0$ имеет единственный корень $x = -\frac{1}{2}$.

Объединив множества решений уравнения и неравенства, получим ответ.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. ◄

1. Всегда ли нули функции разбивают её область определения на промежутки знакопостоянства?
2. Каким свойством обладает функция, непрерывная на промежутке и не имеющая на нём нулей?
3. Опишите, как решать неравенства методом интервалов.

Упражнения

5.1. Решите неравенство:

1) $(x+1)(x-2)(x+5) > 0$;
2) $x(x-3)(x+2) < 0$;
3) $(x+7)(x+5)(x-9) \leqslant 0$;
4) $(2x+3)(3x-1)(x+4) > 0$;
5) $(2x-1)(3-x)(x+1) < 0$;
6) $(x-6)(7x+1)(2-9x) \geqslant 0$.

5.2. Решите неравенство:

1) $(x+3)(x-1)(x+4) < 0$;
2) $(x-7)(x+8)(x-12) \geqslant 0$;
3) $(1-3x)(x+2)(3-x) < 0$;
4) $x(5-x)(6-x) \leqslant 0$.

5.3. Найдите множество решений неравенства:

1) $\frac{x-8}{x+7} < 0$;
2) $\frac{x+9}{x-11} > 0$;
3) $\frac{x+5{,}2}{x-1{,}4} \leqslant 0$;
4) $\frac{5-x}{x-6} \geqslant 0$;
5) $\frac{(x+15)(x-2)}{x-15} \geqslant 0$;
6) $\frac{x-3{,}8}{(x+5)(x-16)} \leqslant 0$.

5.4. Найдите множество решений неравенства:

1) $\frac{x+3}{x-1} > 0$;
2) $\frac{x-4}{x} \geqslant 0$;
3) $\frac{(x-2)(x+1)}{x-4} < 0$;
4) $\frac{(x+1{,}2)(x-1{,}6)}{x-1{,}4} \leqslant 0$;
5) $\frac{(3x-2)(4-x)}{(x+3)(x-1)} > 0$;
6) $\frac{(x+1)(3-x)}{(3x-2)(4-3x)} \geqslant 0$.

5.5. Решите неравенство:

1) $(x+2)(x^2-1) > 0$;
2) $(x^2-4x+3)(x^2+3x+2) \geqslant 0$;
3) $4x^3 - 25x < 0$;
4) $\frac{x^2-4}{x^2-9} > 0$;
5) $\frac{x^2-3x}{x^2-8x+7} \leqslant 0$;
6) $\frac{2x^2-5x+2}{x^2-3x-4} \geqslant 0$.

5.6. Найдите множество решений неравенства:

1) $(x^2-64)(x^2-10x+9)\geqslant 0$;
2) $(x^2+7x)(x^2-7x+6)<0$;
3) $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-36}\leqslant 0$;
4) $\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2-x-3}\geqslant 0$.

5.7. Решите неравенство:

1) $(2x+1)(x-3)(x^2+4)<0$;
2) $(2-x)(3x+5)(x^2-x+1)>0$;
3) $(3x^2-5x-2)(2x^2+x+1)<0$;
4) $(4-x)(3x+1)(x^4+x^2+1)<0$.

5.8. Решите неравенство:

1) $(x^4+1)(5-6x)(x-2)<0$;
2) $(x+3)(x+6)(x+5)(x^2-4x+5)\geqslant 0$.

5.9. Решите неравенство:

1) $(x-4)^2(x^2-7x+10)<0$;
2) $(x-4)^2(x^2-7x+10)\leqslant 0$;
3) $(x-4)^2(x^2-7x+10)>0$;
4) $(x-4)^2(x^2-7x+10)\geqslant 0$;
5) $(x-3)^2(x^2+x-2)<0$;
6) $(x-3)^2(x^2+x-2)\leqslant 0$;
7) $(x-3)^2(x^2+x-2)>0$;
8) $(x-3)^2(x^2+x-2)\geqslant 0$.

5.10. Решите неравенство:

1) $(x-1)(x+3)^2(x-2)<0$;
2) $|x-4|(x+1)(x-3)>0$;
3) $(2x+1)^2(x-1)(x-2)\geqslant 0$;
4) $(x-5)(x+4)(x^2+6x+9)\geqslant 0$.

5.11. Решите неравенство:

1) $x^2(x+1)(x-4)>0$;
2) $|x+2|(x-3)(x-5)\geqslant 0$.

5.12. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-6x+9}>0$;
2) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-6x+9}\geqslant 0$;
3) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-6x+9}<0$;
4) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-6x+9}\leqslant 0$;
5) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}>0$;
6) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}\geqslant 0$;
7) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}<0$;
8) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}\leqslant 0$.

5.13. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x^2+3x}{x-5}\geqslant\dfrac{28}{x-5}$;
2) $\dfrac{1}{x}<1$;
3) $\dfrac{x}{x+3}>\dfrac{1}{2}$;
4) $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$;
5) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x-1}>1$;
6) $\dfrac{x-3}{x+3}\leqslant\dfrac{2x-5}{4x-3}$.

5.14. Решите неравенство:

1) $\dfrac{1}{x+2}\leqslant 1$;
2) $\dfrac{5x+8}{4-x}<2$;
3) $\dfrac{2}{x+3}\geqslant\dfrac{1}{x-1}$.

5.15. Решите неравенство:

1) $(2x+3)(1-4x)^4(x-2)^3(x+6)<0$;
2) $(1-3x)^3(x+2)^2(x+4)^5(x-3)>0$;

3) $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1)\leqslant 0$;

4) $(1-2x)(x-3)^9(2x+7)^6(x+4)(x-2)^2>0$.

5.16. Решите неравенство:

1) $(3-x)^3(x+2)^2(x-1)(2x-5)<0$;

2) $(x^2-4)(x^2+x-2)\leqslant 0$;

3) $(x^3-4x)(x^2+2x-8)(x^2+7x+10)\leqslant 0$.

5.17. Найдите множество решений неравенства:

1) $\dfrac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(x-8)(1-4x)}>0$;

2) $\dfrac{(x-2)(2x+1)^3}{(3-x)^4(1-5x)^5}>0$;

3) $\dfrac{(x-3)(5x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)^2}\geqslant 0$;

4) $\dfrac{x^5|3x-1|(x+3)}{x-2}\leqslant 0$;

5) $\dfrac{(2-x)(4x+3)}{(x-3)^3(x+1)^2}\leqslant 0$;

6) $\dfrac{(x+6)^3(x+4)(6-x)^5}{|x+5|}\geqslant 0$.

5.18. Решите неравенство:

1) $\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3}\leqslant 0$;

2) $\dfrac{(x-1)^2(x+2)^3}{x-5}\geqslant 0$;

3) $\dfrac{x^2(x^2-1)}{x-4}>0$;

4) $\dfrac{(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4}{x^5}\leqslant 0$.

5.19. Решите неравенство:

1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\geqslant\dfrac{3}{x}$;

2) $\dfrac{12}{x^2-4}-\dfrac{7}{x^2-9}\leqslant 0$.

5.20. Решите неравенство:

1) $\dfrac{2(x-3)}{x(x-6)}<\dfrac{1}{x-1}$;

2) $\dfrac{2x+3}{x^2+x-12}<\dfrac{1}{2}$.

5.21. Решите неравенство:

1) $(x^2-4)\sqrt{x^2-1}<0$;

2) $(x^2-4)\sqrt{x^2-1}>0$;

3) $(x^2-4)\sqrt{x^2-1}\leqslant 0$;

4) $(x^2-4)\sqrt{x^2-1}\geqslant 0$;

5) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}<0$;

6) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}>0$;

7) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\leqslant 0$;

8) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\geqslant 0$.

5.22. Решите неравенство:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}>0$;

2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\geqslant 0$;

3) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}<0$;

4) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\leqslant 0$;

5) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}<0$;

6) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}>0$;

7) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\leqslant 0$;

8) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\geqslant 0$.

5.23. Решите неравенство $\left|\dfrac{x}{x^2-9}\right| \leqslant \dfrac{x}{x^2-9}$.

5.24. Решите неравенство $\left|\dfrac{x-1}{x^2-16}\right| \leqslant \dfrac{x-1}{x^2-16}$.

5.25. Для каждого значения a решите неравенство:

1) $(x-3)(x-a) < 0$;
2) $(x-3)(x-a)^2 > 0$;
3) $(x-3)(x-a)^2 \geqslant 0$;
4) $(x-a)(x+5)^2 < 0$;
5) $(x-a)(x+5)^2 \leqslant 0$;
6) $\dfrac{x-5}{x-a} \geqslant 0$;
7) $\dfrac{(x+1)(x-a)}{x+1} \geqslant 0$;
8) $\dfrac{(x+1)(x-a)}{x-a} \leqslant 0$.

Упражнения для повторения

5.26. Решите графически уравнение:

1) $x^2 = 2x + 3$; 2) $x^2 = \dfrac{8}{x}$.

5.27. Определите графически количество решений системы уравнений:

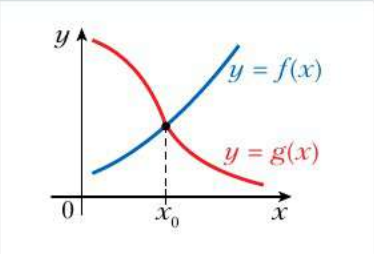
1) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6. \end{cases}$

Когда сделаны уроки

Применение свойств функций

Чаще всего при решении уравнений вида $f(x) = g(x)$ вам приходилось выполнять преобразования левой и правой частей, сводя уравнение к более простому. Однако в ряде случаев ответ можно получить, не упрощая уравнение, а используя свойства функций f и g.

Рис. 5.12



Например, если функция f возрастающая, а функция g убывающая, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня (рис. 5.12). Если этот корень удастся подобрать, то решение уравнения будет завершено.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите уравнение $x^2 + \sqrt{2x-1} = 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + \sqrt{2x-1}$. Её областью определения является промежуток $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Пусть x_1 и x_2 – произвольные значения аргумента функции f из промежутка $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, причём $x_1 < x_2$. По свойствам числовых неравенств можно записать: $x_1^2 + \sqrt{2x_1-1} < x_2^2 + \sqrt{2x_2-1}$. Следовательно, функция f является возрастающей.

Нетрудно заметить, что $f(1) = 2$, то есть $x = 1$ является корнем данного уравнения. Функция f, будучи возрастающей, принимает значение 2 только в одной точке. Следовательно, $x = 1$ – единственный корень данного уравнения.

Ответ: 1. ◂

В следующем примере свойства функций используются при решении системы уравнений.

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^7 - y = y^7 - x, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$

Решение. Перепишем данную систему:

$$\begin{cases} x^7 + x = y^7 + y, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^7 + t$. Тогда первое уравнение записанной системы можно представить так: $f(x) = f(y)$. Функция f является возрастающей (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, $x = y$. Получаем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

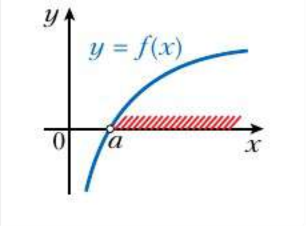
Решив эту систему, получим следующие пары: $(2; 2)$, $(-2; -2)$.

Ответ: $(2; 2)$, $(-2; -2)$. ◂

Покажем, как можно использовать свойства функций при решении неравенств.

На рисунке 5.13 изображён график возрастающей на $\boldsymbol{R}$ функции f, имеющей один нуль $x = a$. Тогда решением неравенства $f(x) > 0$ является промежуток $(a; +\infty)$.

Рис. 5.13



Пример 3. Решите неравенство $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}>4$.

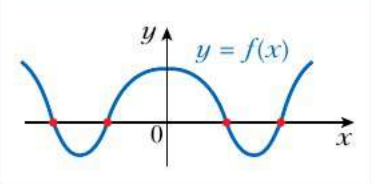
Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}-4$, определённую на промежутке $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. Тогда надо решить неравенство $f(x)>0$.

Поскольку $f(2)=0$, то неравенство $f(x)>0$ можно переписать так: $f(x)>f(2)$.

Функция f является возрастающей (докажите это самостоятельно). Следовательно, если $x>2$, то $f(x)>f(2)$, а если $\frac{3}{2}\leqslant x<2$, то $f(x)<f(2)$. Таким образом, искомым ответом является промежуток $(2;+\infty)$. ◄

На рисунке 5.14 изображён график чётной функции f. Множество корней уравнения $f(x)=0$ симметрично относительно начала координат. Покажем, как можно использовать этот факт при решении следующей задачи.

Рис. 5.14



Пример 4. При каких значениях a уравнение $2ax^4+|x|+x^2=a^2-1$ имеет единственный корень?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=2ax^4+|x|+x^2-a^2+1$. Она является чётной. Поэтому если уравнение $f(x)=0$ имеет корень x_0, то оно также имеет корень $-x_0$. Для того чтобы уравнение имело единственный корень, должно выполняться равенство $x_0=-x_0$, то есть $x_0=0$. Тогда необходимо, чтобы $x=0$ было корнем данного уравнения.

Подставим $x=0$ в исходное уравнение. Получим: $a^2-1=0$. Отсюда $a=1$ или $a=-1$.

При этих значениях a число 0 является корнем исходного уравнения. Однако это не означает, что уравнение не имеет других корней, отличных от нуля. Поэтому следует выяснить, сколько корней имеет исходное уравнение при $a=1$ и $a=-1$.

При $a=1$ имеем: $2x^4+|x|+x^2=0$. Поскольку $2x^4\geqslant 0$, $|x|\geqslant 0$ и $x^2\geqslant 0$, то это уравнение имеет единственный корень $x=0$.

При $a=-1$ имеем: $-2x^4+|x|+x^2=0$. Это уравнение, кроме корня $x=0$, имеет и другие корни, например $x=1$. Следовательно, значение $a=-1$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a=1$. ◄

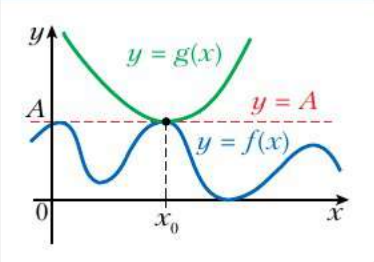
Следующее очевидное соображение является ключом к решению целого ряда уравнений.

Пусть для любого x выполняются неравенства $f(x) \leqslant A$ и $g(x) \geqslant A$, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Рисунок 5.15 иллюстрирует сказанное.

Рис. 5.15

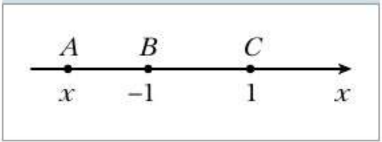


Пример 5. Решите уравнение $|x+1| + |x-1| = \sqrt{4-x^2}$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = |x+1| + |x-1|$ и $g(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Поскольку $4 - x^2 \leqslant 4$, то $\sqrt{4-x^2} \leqslant 2$. Тогда для любого $x \in D(g)$ выполняется неравенство $g(x) \leqslant 2$.

Рис. 5.16



Рассмотрим на координатной прямой точки $A(x)$, $B(-1)$ и $C(1)$ (рис. 5.16). Тогда значение выражения $|x+1| + |x-1|$ равно сумме $AB + AC$. Поскольку $BC = 2$, то при любом положении точки A на координатной прямой выполняется неравенство $AB + AC \geqslant 2$, то есть $|x+1| + |x-1| \geqslant 2$. Тогда для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant 2$.

Получаем, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |x+1| + |x-1| = 2, \\ \sqrt{4-x^2} = 2. \end{cases}$$

Второе уравнение системы имеет единственный корень $x = 0$, который также является корнем первого уравнения системы.

Ответ: 0. ◄

Упражнения

1. Решите уравнение $x^3 + 2x\sqrt{x-1} = 12$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x}, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

3. Решите неравенство $\sqrt{x} + \sqrt{2x-1} < 2$.

4. Решите уравнение $|x-1| + |x+2| = \sqrt{9-x^2}$.

5. При каких значениях a уравнение $ax^6 + 1 = a^2\sqrt{1-|x|}$ имеет единственный корень?

Итоги главы 1

Наименьшее и наибольшее значения функции

Если для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$, где $x_0 \in M$, то число $f(x_0)$ называют наименьшим значением функции f на множестве M и записывают: $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Если для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$, где $x_0 \in M$, то число $f(x_0)$ называют наибольшим значением функции f на множестве M и записывают: $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Чётная и нечётная функции

Функцию f называют чётной, если для любого x из области определения $f(-x) = f(x)$.

Функцию f называют нечётной, если для любого x из области определения $f(-x) = -f(x)$.

Ось ординат является осью симметрии графика чётной функции.

Начало координат является центром симметрии графика нечётной функции.

Построение графика функции $y = f(kx)$

График функции $y = f(kx)$, где $k \neq 0$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с той же ординатой и абсциссой, разделённой на k.

Обратимая функция

Функцию $y = f(x)$ называют обратимой, если для любого $y_0 \in E(f)$ существует единственное число $x_0 \in D(f)$ такое, что $y_0 = f(x_0)$.

Если функция является возрастающей (убывающей), то она является обратимой.

Взаимно обратные функции

Функции f и g называют взаимно обратными, если:
1) $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$;
2) для любого $x_0 \in D(f)$ из равенства $f(x_0) = y_0$ следует, что $g(y_0) = x_0$, то есть $g(f(x_0)) = x_0$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Если функция является возрастающей (убывающей), то обратная к ней функция является также возрастающей (убывающей).

Область определения уравнения

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество значений переменной x, при которых имеют смысл обе части уравнения.

Равносильные уравнения

Уравнения называют равносильными, если множества их корней равны.

Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Равносильные неравенства

Неравенства называют равносильными, если множества их решений равны.

Если к обеим частям неравенства прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим неравенство, равносильное данному.

Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.

Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Уравнение-следствие и неравенство-следствие

Если множество решений первого уравнения (неравенства) является подмножеством множества решений второго уравнения (неравенства), то второе уравнение (неравенство) называют следствием первого уравнения (неравенства).

Те корни полученного уравнения-следствия, которые не являются корнями данного уравнения, называют посторонними корнями данного уравнения.

Глава 2. Степенная функция

В этой главе вы узнаете, какую функцию называют степенной функцией с целым показателем, какими свойствами обладает эта функция, что называют корнем n-й степени, какими свойствами обладает корень n-й степени, что называют степенью с рациональным показателем и каковы её свойства, какие уравнения называют иррациональными.

Вы научитесь извлекать корни n-й степени, выполнять возведение в степень с рациональным показателем, преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональными показателями и корни n-й степени; решать иррациональные уравнения.

§ 6. Степенная функция с натуральным показателем

Свойства и графики функций $y = x$ и $y = x^2$ хорошо знакомы вам из курсов математики предыдущих классов. Эти функции являются частными случаями функции $y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$, которую называют **степенной функцией с натуральным показателем**.

Поскольку выражение x^n, $n \in \mathbf{N}$, имеет смысл при любом x, то *областью определения степенной функции с натуральным показателем является множество* $\mathbf{R}$.

Очевидно, что рассматриваемая *функция имеет единственный нуль* $x = 0$.

Дальнейшее исследование свойств функции $y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$, проведём для двух случаев: n — чётное натуральное число и n — нечётное натуральное число.

• Первый случай: $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$.

Отметим, что при $k = 1$ получаем функцию $y = x^2$, свойства и график которой были рассмотрены в курсе алгебры 8 класса.

Поскольку при любом x выражение x^{2k} принимает только неотрицательные значения, то область значений рассматриваемой функции не содержит ни одного отрицательного числа.

Можно показать, что для любого $a \geqslant 0$ существует такое значение аргумента x, что $x^{2k} = a$.

Сказанное означает, что *областью значений функции $y = x^n$, где n — чётное натуральное число, является множество* $[0; +\infty)$.

Если $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

Следовательно, *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции* $y = x^n$, *где* n *— чётное натуральное число.*

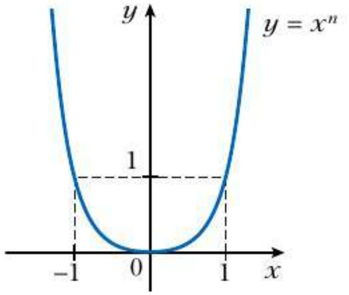
Функция $y = x^n$, *где* n *— чётное натуральное число, является чётной.* Действительно, для любого x из области определения выполняется равенство $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ и $x_1 < x_2$. Тогда $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Воспользовавшись свойством числовых неравенств, получаем: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Отсюда $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Следовательно, *функция* $y = x^n$, *где* n *— чётное натуральное число, убывает на промежутке* $(-\infty; 0]$. Аналогично можно показать, что эта функция *возрастает на промежутке* $[0; +\infty)$.

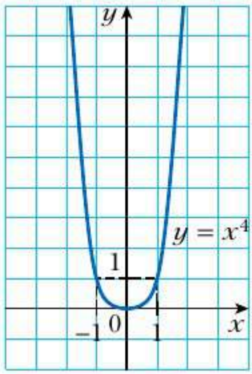
Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^n$, где n – чётное натуральное число (рис. 6.1). В частности, график функции $y = x^4$ изображён на рисунке 6.2.

Рис. 6.1



n — чётное натуральное число

Рис. 6.2



· **Второй случай: $n = 2k + 1$, $k \in N$ или $k = 0$.**

Отметим, что при $k = 0$ получаем функцию $y = x$, свойства и график которой были рассмотрены в курсе алгебры 7 класса.

Теперь пусть $k \in \boldsymbol{N}$.

Можно показать, что для любого a существует такое значение аргумента x, что $x^{2k+1} = a$.

Сказанное означает, что *областью значений функции* $y = x^n$, *где* n *— нечётное натуральное число, является множество* $\boldsymbol{R}$.

Если $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; если $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

Следовательно, *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции* $y = x^n$, *где* n — *нечётное натуральное число.*

Функция $y = x^n$, *где* n — *нечётное натуральное число, является нечётной.* Действительно, для любого x из области определения выполняется равенство $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 < x_2$. Воспользовавшись свойством числовых неравенств, получаем: $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

Следовательно, *функция* $y = x^n$, *где* n — *нечётное натуральное число, является возрастающей.*

Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^n$, где n — нечётное натуральное число, $n > 1$ (рис. 6.3). В частности, графики функции $y = x^3$ и $y = x^5$ изображены на рисунке 6.4.

Рис. 6.3

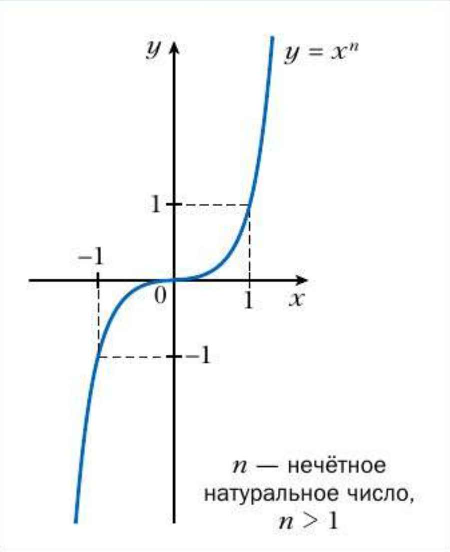
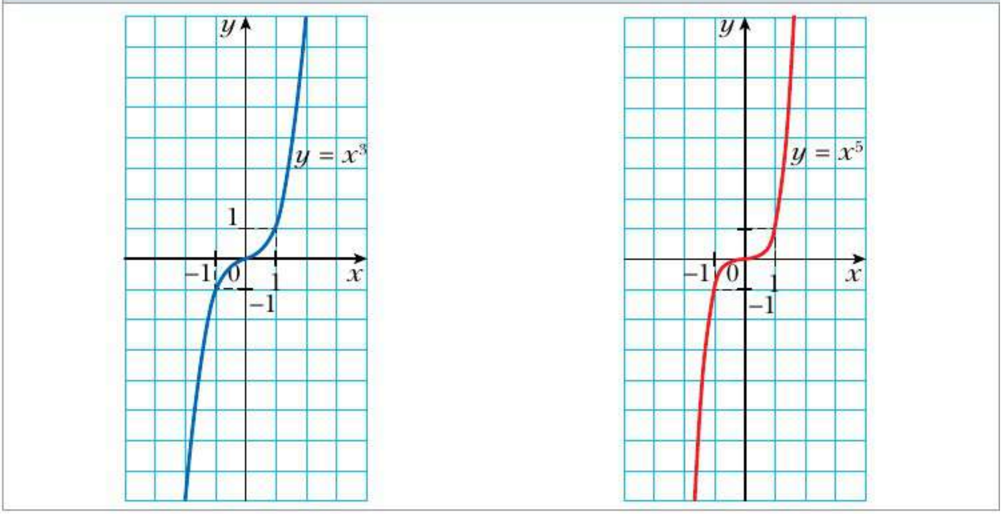


Рис. 6.4



В таблице приведены свойства функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, установленные в этом параграфе.

Свойства	n — чётное натуральное число	n — нечётное натуральное число
Область определения	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
Область значений	$[0; +\infty)$	$\boldsymbol{R}$
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	$y < 0$ на промежутке $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$
Чётность	Чётная	Нечётная
Возрастание/убывание	Убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$	Возрастающая

1. Какую функцию называют степенной функцией с натуральным показателем?
2. Сформулируйте свойства функции $y = x^n$.
3. Изобразите схематически график функции $y = x^n$.

Упражнения

6.1. Через какие из данных точек проходит график функции $y = x^5$:
1) $A\ (-1; 1)$; 2) $B\ (2; 32)$; 3) $C\ (-3; -243)$?

6.2. Через какие из данных точек проходит график функции $y = x^4$:
1) $A\ (2; 16)$; 2) $B\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{81}\right)$; 3) $C\ (0,5; -0,0625)$?

6.3. Функция задана формулой $f(x) = x^{19}$. Сравните:
1) $f(1,4)$ и $f(1,8)$; 3) $f(-6,9)$ и $f(6,9)$;
2) $f(-7,6)$ и $f(-8,5)$; 4) $f(0,2)$ и $f(-12)$.

6.4. Функция задана формулой $f(x) = x^{21}$. Сравните:
1) $f(20)$ и $f(17)$; 2) $f(-44)$ и $f(1,5)$; 3) $f(-52)$ и $f(-45)$.

6.5. Функция задана формулой $f(x) = x^{20}$. Сравните:
1) $f(3,6)$ и $f(4,2)$; 3) $f(-2,4)$ и $f(2,4)$;
2) $f(-6,7)$ и $f(-5,8)$; 4) $f(-15)$ и $f(2)$.

6.6. Функция задана формулой $f(x) = x^{50}$. Сравните:
1) $f(9,2)$ и $f(8,5)$; 3) $f(19)$ и $f(-19)$;
2) $f(-1,1)$ и $f(-1,2)$; 4) $f(-7)$ и $f(9)$.

6.7. Решите уравнение:

1) $x^5 = 32$; 2) $x^3 = -\frac{8}{27}$; 3) $x^4 = 81$; 4) $x^4 = -16$.

6.8. Решите уравнение:

1) $x^3 = -27$; 2) $x^5 = 0{,}00032$; 3) $x^6 = 64$; 4) $x^8 = -1$.

6.9. Расположите в порядке убывания значения выражений $\left(-\frac{3}{4}\right)^5$, $\left(-2\frac{1}{3}\right)^5$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$, $\left(-2\frac{2}{5}\right)^5$.

6.10. Расположите в порядке возрастания значения выражений $(1{,}06)^4$, $(-0{,}48)^4$, $(-2{,}12)^4$, $(-3{,}25)^4$.

6.11. Постройте график функции:

1) $y = x^3 - 1$; 3) $y = -x^3$; 5) $y = (x-1)^4$;

2) $y = (x+2)^3$; 4) $y = x^4 - 4$; 6) $y = -\frac{1}{2}x^4$.

6.12. Постройте график функции:

1) $y = x^3 + 3$; 3) $y = x^4 + 2$; 5) $y = \frac{1}{4}x^3$;

2) $y = (x-3)^3$; 4) $y = (x+1)^4$; 6) $y = -x^4$.

6.13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^8$ на промежутке:

1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -2]$.

6.14. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^5$ на промежутке:

1) $[-3; 3]$; 2) $[-2; 0]$; 3) $[1; +\infty)$.

6.15. Определите графически количество корней уравнения:

1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0{,}5x - 2$.

6.16. Определите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$

6.17. Постройте график функции:

1) $f(x) = \begin{cases} x^4, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^5, \text{ если } x < -1, \\ -x - 2, \text{ если } x \geqslant -1. \end{cases}$

Пользуясь построенным графиком, укажите промежутки возрастания и промежутки убывания данной функции.

6.18. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ если } x < 0, \\ -\sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

Пользуясь построенным графиком, укажите промежутки возрастания и промежутки убывания данной функции.

6.19. Сколько корней в зависимости от значения a имеет уравнение:
1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

6.20. Сколько корней в зависимости от значения a имеет уравнение $x^8 = 9a - a^3$?

6.21. Чётным или нечётным натуральным числом является показатель степени n функции $f(x) = x^n$, если:
1) $f(-4) > f(-2)$; 3) $f(-4) < f(-2)$; 5) $f(-4) > f(2)$;
2) $f(-4) < f(2)$; 4) $f(4) > f(2)$; 6) $f(4) > f(-2)$?

Готовимся к изучению новой темы

6.22. Вычислите значение выражения:
1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^0 - 5^{-2}$; 5) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$;
2) $2^{-3} + 6^{-2}$; 4) $9 \cdot 0{,}1^{-1}$; 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

6.23. Представьте в виде дроби выражение:
1) $a^{-2} + a^{-3}$; 2) $mn^{-4} + m^{-4}n$; 3) $(c^{-1} - d^{-1})(c - d)^{-2}$.

Повторите содержание п. 2 и 3 на с. 326.

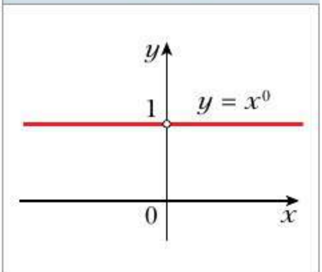
§ 7. Степенная функция с целым показателем

Функцию, которую можно задать формулой $y = x^n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, называют **степенной функцией с целым показателем**.

Свойства этой функции для натурального показателя были рассмотрены в предыдущем параграфе. Здесь мы рассмотрим случаи, когда показатель n является целым отрицательным числом или нулём.

Областью определения функции $y = x^0$ является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, областью значений — одноэлементное множество $\{1\}$. График этой функции изображён на рисунке 7.1.

Рис. 7.1



Рассмотрим функцию $y = x^{-n}$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

С частным случаем этой функции, когда $n = 1$, то есть с функцией $y = \frac{1}{x}$, вы знакомы из курса алгебры 8 класса.

Запишем функцию $y = x^{-n}$ в виде $y = \frac{1}{x^n}$. Тогда становится понятным, что *областью определения функции* $y = x^{-n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, *является множество* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Очевидно, что эта функция нулей не имеет.

Дальнейшее исследование свойств функции $y = x^{-n}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, проведём для двух случаев: n — чётное натуральное число и n — нечётное натуральное число.

· Первый случай: $n = 2k$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Имеем: $x^{-2k} = \dfrac{1}{x^{2k}}$. Так как выражение $\dfrac{1}{x^{2k}}$ принимает только положительные значения, то в область значений рассматриваемой функции не входят отрицательные числа, а также число 0.

Можно показать, что для любого $a > 0$ существует такое значение аргумента x, что $x^{-2k} = a$.

Сказанное означает, что *областью значений функции $y = x^{-n}$, где n — чётное натуральное число, является множество* $(0; +\infty)$.

Поскольку для любого $x \neq 0$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{x^{2k}} > 0$, то *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции $y = x^{-n}$, где n — чётное натуральное число.*

Функция $y = x^{-n}$, где n — чётное натуральное число, является чётной. Действительно, для любого x из области определения выполняются равенства $(-x)^{-2k} = \dfrac{1}{(-x)^{2k}} = \dfrac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ и $x_1 < x_2$. Тогда $-x_1 > -x_2 > 0$. Воспользовавшись свойством числовых неравенств, получаем: $0 < -\dfrac{1}{x_1} < -\dfrac{1}{x_2}$. Отсюда $\left(-\dfrac{1}{x_1}\right)^{2k} < \left(-\dfrac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $\dfrac{1}{x_1^{2k}} < \dfrac{1}{x_2^{2k}}$; $x_1^{-2k} < x_2^{-2k}$.

Следовательно, *функция $y = x^{-n}$, где n — чётное натуральное число, возрастает на промежутке* $(-\infty; 0)$.

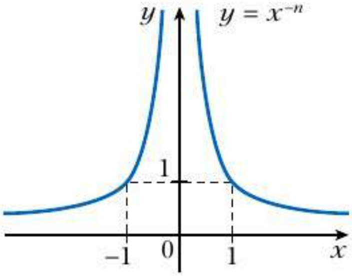
Аналогично можно показать, что *функция $y = x^{-n}$, где n — чётное натуральное число, убывает на промежутке* $(0; +\infty)$.

Заметим, что с увеличением модуля x значение выражения $\dfrac{1}{x^{2k}}$, $k \in \boldsymbol{N}$, становится всё меньшим и меньшим. Поэтому расстояние от точки графика функции $y = \dfrac{1}{x^{2k}}$, $k \in \boldsymbol{N}$, до оси абсцисс уменьшается с увеличением модуля абсциссы точки и может стать сколь угодно малым, но никогда не будет равным нулю.

Также можно установить, что с увеличением модуля ординаты расстояние от точки графика функции $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \boldsymbol{N}$, до оси ординат уменьшается и может стать сколь угодно малым, но никогда не будет равным нулю.

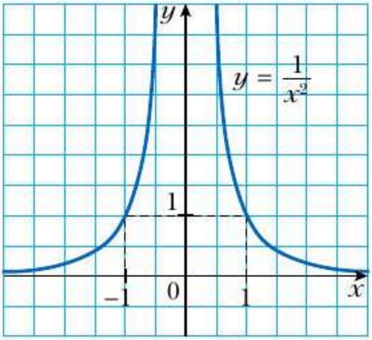
Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^{-n}$, где n — чётное натуральное число (рис. 7.2). В частности, график функции $y = \frac{1}{x^2}$ изображён на рисунке 7.3.

Рис. 7.2



n — чётное натуральное число

Рис. 7.3



• Второй случай: $n = 2k - 1$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Можно показать, что для любого $a \neq 0$ существует такое значение аргумента x, что $x^{-(2k-1)} = a$.

Сказанное означает, что *областью значений функции* $y = x^{-n}$, *где* n — *нечётное натуральное число, является множество* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Если $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; если $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Следовательно, *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции* $y = x^{-n}$, *где* n — *нечётное натуральное число.*

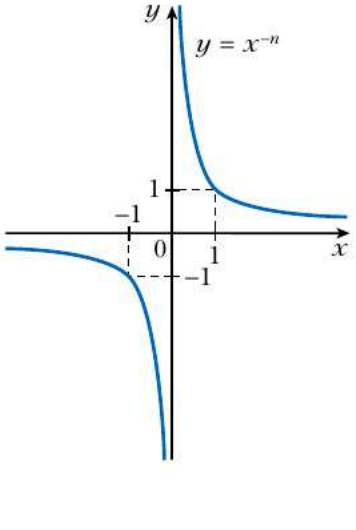
Функция $y = x^{-n}$, *где* n — *нечётное натуральное число, является нечётной.* Действительно, для любого x из области определения выполняются равенства $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ и $x_1 < x_2$. Тогда $-x_1 > -x_2 > 0$. Воспользовавшись свойствами числовых неравенств, получаем: $-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$; $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k-1}$; $-\frac{1}{x_1^{2k-1}} < -\frac{1}{x_2^{2k-1}}$; $\frac{1}{x_1^{2k-1}} > \frac{1}{x_2^{2k-1}}$. Следовательно, рассматриваемая функция убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. Аналогично можно показать, что эта функция убывает и на промежутке $(0; +\infty)$.

Следовательно, *функция $y = x^{-n}$, где n — нечётное натуральное число, убывает на каждом из промежутков* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$.

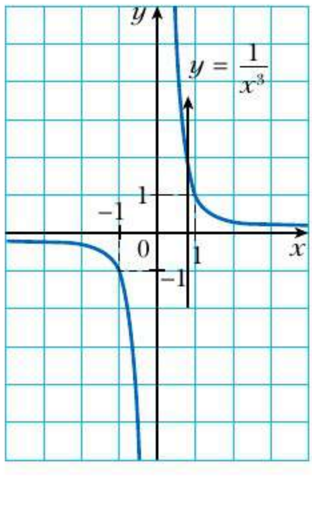
Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^{-n}$, где n — нечётное натуральное число (рис. 7.4). В частности, график функции $y = \frac{1}{x^3}$ изображён на рисунке 7.5.

Рис. 7.4



n — нечётное натуральное число

Рис. 7.5



В таблице приведены свойства функции $y = x^{-n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, изученные в этом параграфе.

Свойства	n — чётное натуральное число	n — нечётное натуральное число
Область определения	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значений	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нули функции	—	—
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	$y < 0$ на промежутке $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$
Чётность	Чётная	Нечётная
Возрастание/убывание	Возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$, убывает на промежутке $(0; +\infty)$	Убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

1. Какую функцию называют степенной функцией с целым показателем?
2. Какая фигура является графиком функции $y = x^0$?
3. Сформулируйте свойства функции $y = x^{-n}$, $n \in N$.
4. Изобразите схематически график функции $y = x^{-n}$, $n \in N$.

Упражнения

7.1. Проходит ли график функции $y = x^{-4}$ через точку:

1) $A\left(2; \frac{1}{16}\right)$; 2) $B\left(-2; \frac{1}{8}\right)$; 3) $C\left(\frac{1}{3}; 81\right)$; 4) $D\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\right)$?

7.2. Проходит ли график функции $y = x^{-5}$ через точку:

1) $A\ (0; 0)$; 2) $B\ (-1; -1)$; 3) $C\left(\frac{1}{2}; 32\right)$; 4) $D\left(-3; -\frac{1}{243}\right)$?

7.3. Дана функция $f(x) = x^{-19}$. Сравните:
1) $f(1,6)$ и $f(2)$; 3) $f(-9,6)$ и $f(9,6)$;
2) $f(-5,6)$ и $f(-6,5)$; 4) $f(0,1)$ и $f(-10)$.

7.4. Дана функция $f(x) = x^{-25}$. Сравните:
1) $f(18)$ и $f(16)$; 2) $f(-42)$ и $f(2,5)$; 3) $f(-32)$ и $f(-28)$.

7.5. Функция задана формулой $f(x) = x^{-16}$. Сравните:
1) $f(1,6)$ и $f(2,2)$; 3) $f(-3,4)$ и $f(3,4)$;
2) $f(-4,5)$ и $f(-3,6)$; 4) $f(-18)$ и $f(3)$.

7.6. Функция задана формулой $f(x) = x^{-40}$. Сравните:

1) $f(6{,}2)$ и $f(5{,}5)$;
2) $f(-1{,}6)$ и $f(-1{,}7)$;
3) $f(24)$ и $f(-24)$;
4) $f(-8)$ и $f(6)$.

7.7. Найдите область определения функции:

1) $y = (x^{-1})^{-1}$;
2) $y = ((x-2)^{-2})^{-2}$.

7.8. Найдите точки пересечения графиков функций:

1) $y = x$ и $y = x^{-3}$;
2) $y = x^{-2}$ и $y = \frac{1}{8}x$.

7.9. Найдите точки пересечения графиков функций $y = x^{-4}$ и $y = \frac{1}{32}x$.

7.10. Постройте график функции:

1) $y = (x-2)^0$;
2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0$.

7.11. Постройте график уравнения:

1) $(y+2)^0 = x - 2$;
2) $(y-2)^0 = (x+1)^0$.

7.12. Постройте график функции:

1) $y = x^{-2} + 2$;
2) $y = (x-3)^{-2}$;
3) $y = -\frac{1}{2}x^{-2}$;
4) $y = x^{-3} - 1$;
5) $y = (x-1)^{-3}$;
6) $y = 3x^{-3}$.

7.13. Постройте график функции:

1) $y = x^{-5} - 3$;
2) $y = 4x^{-5}$;
3) $y = (x+1)^{-4}$;
4) $y = -x^{-4}$.

7.14. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^{-6}$ на промежутке:

1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$;
2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$;
3) $[1; +\infty)$.

7.15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^{-3}$ на промежутке:

1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$;
2) $[-2; -1]$;
3) $(-\infty; -3]$.

7.16. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^3 + 3. \end{cases}$

7.17. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = \frac{1}{8}x^2 - 4; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y = x^{-2}, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$

7.18. Чётным или нечётным является натуральное число n в показателе степени функции $f(x) = x^{-n}$, если:

1) $f(-2) > f(-1)$;
2) $f(-2) < f(1)$;
3) $f(-2) < f(-1)$;
4) $f(2) < f(1)$?

Готовимся к изучению новой темы

7.19. Найдите значение выражения:

1) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}09}-2$; 3) $\left(\sqrt{13}\right)^2-3\cdot\left(\sqrt{8}\right)^2$.

7.20. Решите уравнение:

1) $x^2=25$; 2) $x^2=0{,}49$; 3) $x^2=3$; 4) $x^2=-25$.

7.21. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{-x}$; 3) $\sqrt{-x^2}$; 5) $\sqrt{x^2+8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$;

2) $\sqrt{x^2}$; 4) $\sqrt{x-8}$; 6) $\sqrt{(x-8)^2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$?

7.22. Сравните числа:

1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{5}}$; 3) $\sqrt{33}$ и 6; 5) $\sqrt{30}$ и $2\sqrt{7}$;

2) $\sqrt{32}$ и $\sqrt{26}$; 4) $3\sqrt{5}$ и $\sqrt{42}$; 6) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

7.23. Решите графически уравнение:

1) $\sqrt{x}=-x-1$; 2) $\sqrt{x}=2-x$; 3) $\sqrt{x}=\frac{1}{x}$.

Повторите содержание п. 4, 5, 22 на с. 326, 327, 332.

§ 8. Определение корня n-й степени. Функция $y=\sqrt[n]{x}$

Вы знаете, что корнем второй степени (квадратным корнем) из числа a называют такое число, вторая степень которого равна a. Аналогично определяют корень n-й степени из числа a, где $n\in\mathbf{N}$, $n>1$.

Определение

Корнем n-й степени из числа a, где $n\in\mathbf{N}$, $n>1$, называют такое число, n-я степень которого равна a.

Например, корнем пятой степени из числа 32 является число 2, так как $2^5=32$; корнем третьей степени из числа -64 является число -4, так как $(-4)^3=-64$; корнями четвёртой степени из числа 81 являются числа 3 и -3, так как $3^4=81$ и $(-3)^4=81$.

Из определения следует, что любой корень уравнения $x^n=a$, где $n\in\mathbf{N}$, $n>1$, является корнем n-й степени из числа a, и наоборот, любой корень n-й степени из числа a является корнем рассматриваемого уравнения.

Если n — нечётное натуральное число, то графики функций $y = x^n$ и $y = a$ при любом a пересекаются в одной точке (рис. 8.1). Это означает, что уравнение $x^n = a$ имеет единственный корень при любом a. Тогда можно сделать такой вывод:

если n — нечётное натуральное число, большее 1, то из любого числа существует корень n-й степени, причём только один.

Корень нечётной степени n, $n > 1$, из числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$ (читают: «корень n-й степени из a»). Например, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Знак $\sqrt[n]{}$ называют **знаком корня *n*-й степени** или **радикалом**. Выражение, стоящее под радикалом, называют **подкоренным выражением**.

Корень третьей степени также принято называть **кубическим корнем**. Например, запись $\sqrt[3]{2}$ читают: «корень кубический из числа 2».

Подчеркнём, что выражение $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbf{N}$, определено при любом a.

Из определения корня n-й степени следует, что ***при любом a выполняется равенство***:

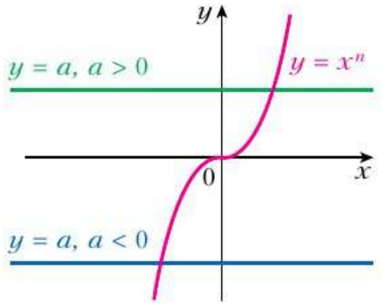
$$\boxed{\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a.}$$

Например, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0{,}1}\right)^7 = -0{,}1$.

Рассмотрим уравнение $x^n = a$, где n — чётное натуральное число.

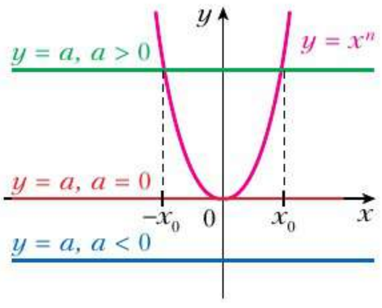
Из рисунка 8.2 видно: если $a < 0$, то графики функций $y = x^n$ и $y = a$ не имеют общих точек; если $a = 0$, то рассматриваемые графики имеют од-

Рис. 8.1



n — нечётное натуральное число, $n > 1$

Рис. 8.2



n — чётное натуральное число

ну общую точку; если $a > 0$, то общих точек две, причём их абсциссы – противоположные числа. Тогда можно сделать такой вывод:

если n — чётное натуральное число, то при $a < 0$ корень n-й степени из числа a не существует; при $a = 0$ корень n-й степени из числа a равен 0; при $a > 0$ существуют два противоположных числа, каждое из которых является корнем n-й степени из числа a.

Вы знаете, что арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, вторая степень которого равна a. Аналогично определяют арифметический корень n-й степени.

Определение

Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a, где $n \in N$, $n > 1$, называют такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень n-й степени из неотрицательного числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$.

Например, $\sqrt[4]{81} = 3$, так как $3 \geqslant 0$ и $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, так как $2 \geqslant 0$ и $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, так как $0 \geqslant 0$ и $0^{10} = 0$.

Вообще, **если $b \geqslant 0$ и $b^n = a$, где $n \in N$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.**

Обратим внимание на то, что для обозначения арифметического корня n-й степени из неотрицательного числа a и корня нечётной степени n из числа a используют одну и ту же запись: $\sqrt[n]{a}$. Запись $\sqrt[2k]{a}$, $k \in N$, используют только для обозначения арифметического корня. Заметим, что корень чётной степени из числа a не имеет обозначения.

С помощью знака корня n-й степени можно записывать корни уравнения $x^n = a$, где $n \in N$, $n > 1$.

- Если n – нечётное натуральное число, то при любом значении a рассматриваемое уравнение имеет единственный корень $x = \sqrt[n]{a}$.
- Если n – чётное натуральное число и $a > 0$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = \sqrt[n]{a}$, $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.
- Если $a = 0$, то $x = 0$.

Например, корнем уравнения $x^3 = 7$ является число $\sqrt[3]{7}$; корнями уравнения $x^4 = 5$ являются два числа: $-\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[4]{5}$.

Из определения арифметического корня n-й степени следует, что:

1) $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$, **где** $a \geqslant 0$;

2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, **где** $a \geqslant 0$.

Например, $\sqrt[4]{7} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt[6]{7}\right)^6 = 7$.

Покажем, что при любом a и $k \in \boldsymbol{N}$

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}.$$

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[2k+1]{x} = y$, надо показать, что $y^{2k+1} = x$.

Имеем: $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Доказанное свойство позволяет корень нечётной степени из отрицательного числа выразить через арифметический корень.

Например, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-12} = -\sqrt[5]{12}$.

Выше было установлено, что корень нечётной степени из любого числа существует и принимает единственное значение. Поэтому каждому действительному числу x можно поставить в соответствие единственное число y такое, что $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Указанное правило задаёт функцию $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, где $k \in \boldsymbol{N}$, с областью определения $\boldsymbol{R}$.

Покажем, что функция f является обратной к функции $g(x) = x^{2k+1}$.

Поскольку уравнение $\sqrt[2k+1]{x} = a$ при любом a имеет корень (число a^{2k+1}), то областью значений функции f является множество $\boldsymbol{R}$.

Имеем: $D(f) = E(g) = \boldsymbol{R}$,

$E(f) = D(g) = \boldsymbol{R}$.

Для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)^{2k+1} = x$. Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$. Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

Используя график функции $y = x^{2k+1}$ и теорему 3.2, можно построить график функции $y = \sqrt[2k+1]{x}$ (рис. 8.3). На рисунке 8.4 изображён график функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Установим некоторые свойства функции $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$.

Рис. 8.3

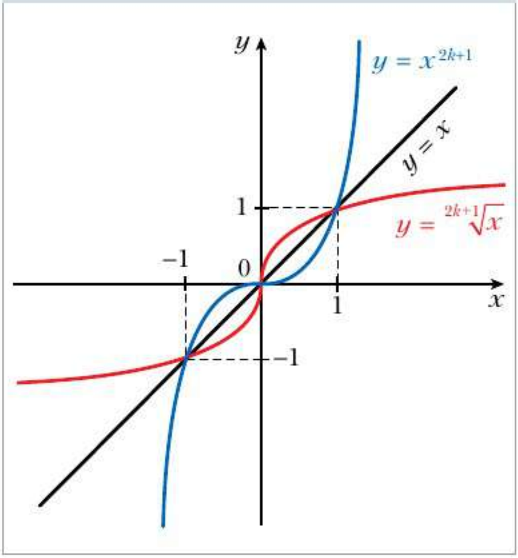
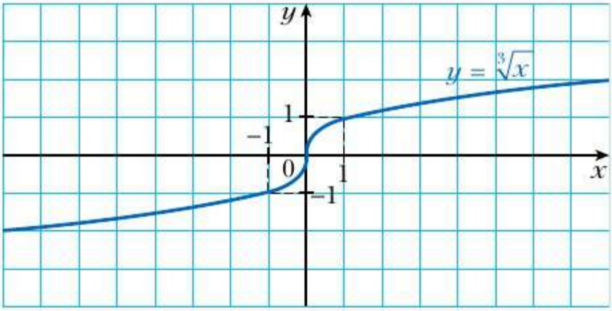


Рис. 8.4



Поскольку функция $g(x) = x^{2k+1}$ возрастающая, то по теореме 3.3 функция $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ также является возрастающей.

Функция $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ имеет единственный нуль $x = 0$.

Если $x < 0$, то $f(x) < 0$; если $x > 0$, то $f(x) > 0$. Следовательно, промежутки $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ являются промежутками знакопостоянства функции f.

Функция f является нечётной. Действительно, для любого x из области определения функции f выполняется равенство $\sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x}$, то есть $f(-x) = -f(x)$.

Аналогично определяют функцию $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Функция f является обратной к функции $g(x) = x^{2k}$, $k \in \boldsymbol{N}$, с областью определения $[0; +\infty)$.

На рисунке 8.5 показано, как с помощью графика функции $y = x^{2k}$, где $x \geqslant 0$, построить график функции $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \boldsymbol{N}$. На рисунке 8.6 изображён график функции $y = \sqrt[4]{x}$.

Рис. 8.5

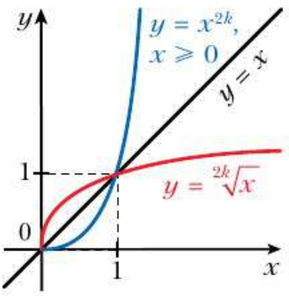
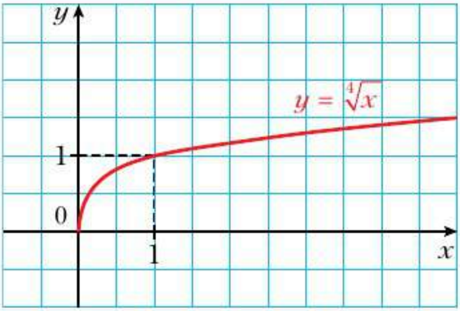


Рис. 8.6



Выясним некоторые свойства функции $f(x) = \sqrt[2k]{x}$.

Поскольку функция $g(x) = x^{2k}$, $k \in \boldsymbol{N}$, $D(g) = [0; +\infty)$, является возрастающей, то функция $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ также является возрастающей.

Функция f имеет единственный нуль $x = 0$.

Если $x > 0$, то $f(x) > 0$. Следовательно, промежуток $(0; +\infty)$ является промежутком знакопостоянства функции f.

Поскольку область определения функции f не является симметричной относительно начала координат, то функция f не является ни чётной, ни нечётной.

В таблице приведены свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, изученные в этом параграфе.

Свойства	n — нечётное натуральное число	n — чётное натуральное число, $n > 1$
Область определения	$\boldsymbol{R}$	$[0; +\infty)$
Область значений	$\boldsymbol{R}$	$[0; +\infty)$
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$
Промежутки знакопостоянства	$y < 0$ на промежутке $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$	$y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$
Чётность	Нечётная	Не является ни чётной, ни нечётной
Возрастание/ убывание	Возрастающая	Возрастающая

Пример. Решите неравенство: 1) $\sqrt[3]{x} < 2$; 2) $\sqrt[4]{x-2} < 1$.

Решение.

1) Данное неравенство равносильно такому: $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{8}$. Поскольку функция $y = \sqrt[3]{x}$ является возрастающей, то можно сделать вывод, что $x < 8$.

Ответ: $(-\infty; 8)$.

2) Имеем: $\sqrt[4]{x-2} < \sqrt[4]{1}$. Поскольку функция $y = \sqrt[4]{t}$ является возрастающей и определена на множестве $[0; +\infty)$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x - 2 < 1, \\ x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда $2 \leqslant x < 3$.

Ответ: $[2; 3)$. ◄

1. Что называют корнем n-й степени из числа a, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$?
2. При каких значениях a имеет смысл выражение $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \boldsymbol{N}$?
3. Что называют арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$?
4. При каких значениях a имеет смысл выражение $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \boldsymbol{N}$?
5. Какими свойствами обладает функция $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \boldsymbol{N}$?
6. Изобразите схематически график функции $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \boldsymbol{N}$.
7. Какими свойствами обладает функция $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \boldsymbol{N}$?
8. Изобразите схематически график функции $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Упражнения

8.1. Имеет ли смысл запись:

1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{-2}$; 3) $\sqrt[4]{2}$; 4) $\sqrt[6]{0}$; 5) $\sqrt[6]{-1}$?

8.2. Верно ли равенство (ответ обоснуйте):

1) $\sqrt[3]{27} = 3$; 2) $\sqrt[3]{343} = -3$; 3) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}} = -2$?

8.3. Докажите, что:
1) число 2 является арифметическим кубическим корнем из числа 8;
2) число 3 является арифметическим корнем четвёртой степени из числа 81;
3) число -3 не является арифметическим корнем четвёртой степени из числа 81.

8.4. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{216}$; 3) $\sqrt[5]{-0,00001}$; 5) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 7) $\sqrt[4]{9^2}$;

2) $\sqrt[4]{0,0016}$; 4) $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}}$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-243}$; 8) $\sqrt[6]{8^2}$.

8.5. Чему равно значение выражения:

1) $\sqrt[3]{343}$; 2) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$; 3) $0,5\sqrt[3]{-64}$; 4) $\sqrt[100]{49^{50}}$?

8.6. Вычислите:

1) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 3) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 5) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{48}\right)^6$;

2) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^4$; 4) $-\sqrt[8]{7^8}$; 6) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{48^6}$.

8.7. Найдите значение выражения:

1) $\left(\sqrt[8]{18}\right)^8$; 3) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{45^3}$;

2) $\left(-\sqrt[9]{9}\right)^9$; 4) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$; 6) $\left(-2\sqrt[5]{-5}\right)^5$.

8.8. Вычислите:

1) $0{,}3\sqrt[3]{1\,000}-5\sqrt[8]{256}+6\cdot\left(-\sqrt[10]{6}\right)^{10}$;

2) $\sqrt[5]{14^5}+\left(-2\sqrt{10}\right)^2-\sqrt[7]{-128}$.

8.9. Вычислите:

1) $200\sqrt[3]{0{,}001}-\sqrt[5]{-0{,}00032}-\left(-4\sqrt{2}\right)^2$;

2) $\sqrt[3]{8\,000}\cdot\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}-\left(-\sqrt[5]{8}\right)^5+\sqrt[7]{17^7}$.

8.10. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[8]{x+6}$; 3) $\sqrt[4]{y(y-1)}$; 5) $\sqrt[6]{-x^2}$;

2) $\sqrt[9]{a-10}$; 4) $\sqrt[6]{-x}$; 6) $\sqrt[10]{x^2+2x-8}$?

8.11. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt[4]{x-2}$; 2) $y=\sqrt[7]{4-x}$; 3) $y=\dfrac{1}{\sqrt[8]{x^2-4x+4}}$.

8.12. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt[3]{x-1}$; 2) $y=\sqrt[6]{x+1}$; 3) $y=\sqrt[4]{x^2-x-2}$.

8.13. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt[4]{2-x}$; 2) $y=\sqrt[9]{\dfrac{x+1}{x-3}}$; 3) $y=\sqrt[6]{x^2-4x+3}$.

8.14. Найдите область значений функции:

1) $y=\sqrt[4]{x}+1$; 2) $y=-\sqrt[6]{x}-2$; 3) $y=\sqrt[3]{x}-3$.

8.15. Найдите область значений функции:

1) $y=\sqrt[8]{x}+2$; 2) $y=\sqrt[4]{x}-4$; 3) $y=\sqrt[5]{x}-2$.

8.16. Сравните:

1) $\sqrt[3]{1{,}6}$ и $\sqrt[3]{1{,}4}$; 2) $\sqrt[5]{-23}$ и $\sqrt[5]{-26}$; 3) 2 и $\sqrt[4]{17}$.

8.17. Сравните:

1) $\sqrt[6]{55}$ и $\sqrt[6]{80}$; 2) $\sqrt[7]{-\frac{1}{3}}$ и $\sqrt[7]{-\frac{1}{4}}$.

8.18. Решите уравнение:

1) $x^3=27$; 4) $x^4=16$; 7) $27x^3-1=0$;
2) $x^5=9$; 5) $x^6=5$; 8) $(x-2)^3=125$;
3) $x^7=-2$; 6) $x^4=-81$; 9) $(x+5)^4=10\,000$.

8.19. Решите уравнение:

1) $x^9 = 1$; 3) $x^{18} = 0$; 5) $64x^5 + 2 = 0$;

2) $x^{10} = 1$; 4) $x^6 = -64$; 6) $(x-3)^6 = 729$.

8.20. Решите уравнение:

1) $\sqrt[3]{x} = \frac{4}{5}$; 3) $\sqrt[3]{x} = -6$; 5) $\sqrt[3]{2x} + 7 = 0$;

2) $\sqrt[4]{x} = 3$; 4) $\sqrt[6]{x} = -2$; 6) $\sqrt[3]{2x+7} = 0$.

8.21. Решите уравнение:

1) $\sqrt[3]{x} = -2$; 3) $\sqrt[5]{x} = -2$; 5) $\sqrt[4]{3x-2} = 0$;

2) $\sqrt[4]{x} = -2$; 4) $\sqrt[4]{3x} - 2 = 0$; 6) $\sqrt[4]{3x-2} = 2$.

8.22. Постройте график функции:

1) $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; 2) $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4$.

8.23. Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{21}$; 3) $\sqrt[3]{100}$; 4) $-\sqrt[3]{81}$?

8.24. Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

8.25. Постройте график функции:

1) $y = -\sqrt[3]{x}$; 3) $y = \sqrt[3]{x-2}$; 5) $y = \sqrt[3]{x-2} - 2$;

2) $y = \sqrt[3]{x} - 2$; 4) $y = \sqrt[3]{2-x}$; 6) $y = \sqrt[3]{|x|}$.

8.26. Постройте график функции:

1) $y = -\sqrt[4]{x}$; 3) $y = \sqrt[4]{x} + 3$; 5) $y = \sqrt[4]{x+3} + 1$;

2) $y = \sqrt[4]{-x}$; 4) $y = \sqrt[4]{x+3}$; 6) $y = \sqrt[4]{|x|}$.

8.27. Решите уравнение:

1) $(x^2-4)\sqrt[4]{x+1} = 0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2-2x-3} = 0$.

8.28. Решите уравнение:

1) $(|x|-3)\sqrt[6]{2-x} = 0$; 2) $(x+2)\sqrt[6]{x^2+2x-3} = 0$.

8.29. Постройте график функции:

1) $y = \left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4 + \left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4 + 1$; 2) $y = \left(\sqrt[6]{x}\right)^6 + \left(\sqrt[6]{1-x}\right)^6$.

8.30. Постройте график функции:

1) $y = x\left(\sqrt[4]{x}\right)^4$; 2) $y = \left(\sqrt[8]{2+x}\right)^8 + \left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$.

8.31. Решите неравенство:

1) $\sqrt[6]{x-1} > 2$; 2) $\sqrt[3]{3x+1} < 4$; 3) $\sqrt[8]{4x+1} \leqslant 1$.

8.32. Решите неравенство:

1) $\sqrt[10]{x+2} > 1$; 2) $\sqrt[5]{3x+2} < 2$; 3) $\sqrt[4]{5x+1} < 3$.

Готовимся к изучению новой темы

8.33. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^2} = -a$?

8.34. Упростите выражение:

1) $\sqrt{n^2}$, если $n < 0$; 3) $\sqrt{c^{12}}$;

2) $\sqrt{16p^2}$, если $p \geqslant 0$; 4) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, если $b \leqslant 0$.

8.35. Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{0{,}64 \cdot 36}$; 2) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt{\dfrac{81}{100}}$; 4) $\sqrt{3\dfrac{13}{36}}$.

8.36. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$; 3) $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}$.

8.37. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{-m^9}$; 3) $\sqrt{4x^6y}$, если $x < 0$;

2) $\sqrt{a^4b^{13}}$, если $a \neq 0$; 4) $\sqrt{45x^3y^{14}}$, если $y < 0$.

8.38. Внесите множитель под знак корня:

1) $m\sqrt{7}$, если $m \geqslant 0$; 3) $p\sqrt{p^3}$;

2) $3n\sqrt{6}$, если $n \leqslant 0$; 4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, если $y \leqslant 0$.

Повторите содержание п. 5, 28 на с. 327, 335.

§ 9. Свойства корня n-й степени

Рассмотрим теоремы, выражающие свойства корня n-й степени.

Теорема 9.1
(первая теорема о корне из степени)

Для любого $a \in R$ и $k \in N$ выполняются равенства:

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a,$$

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

Доказательство

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[2k+1]{x} = y$, достаточно показать, что $y^{2k+1} = x$. Тогда первое из доказываемых равенств очевидно.

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[2k]{x} = y$, достаточно показать, что $y \geqslant 0$ и $y^{2k} = x$. Имеем: $|a| \geqslant 0$ и $(|a|)^{2k} = a^{2k}$. ◄

Теорема 9.2
(корень из произведения)

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in N$, $n > 1$, то

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Доказательство

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[n]{x} = y$, где $x \geqslant 0$, достаточно показать, что $y \geqslant 0$ и $y^n = x$.

Имеем: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Тогда $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Кроме того, $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$. ◄

Теорема 9.3
(корень из частного)

Если $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in N$, $n > 1$, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Докажите эту теорему самостоятельно.

Теорема 9.4
(степень корня)

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, то

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Доказательство

Если $k = 1$, то доказываемое равенство очевидно.

Пусть $k > 1$. Имеем: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множителей}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ◄

Теорема 9.5
(корень из корня)

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, $k > 1$, то

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Доказательство

Имеем: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$. Кроме того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$. ◄

Теорема 9.6
(вторая теорема о корне из степени)

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, то

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}.$$

Доказательство

Если $k = 1$, то доказываемое равенство очевидно.

Пусть $k > 1$. Имеем: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ◄

Пример 1. Найдите значение выражения: 1) $\sqrt[4]{(-7,3)^4}$; 2) $\sqrt[6]{1,2^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{0,0081 \cdot 625}$; 4) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; 5) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}$.

Решение.

1) Воспользовавшись теоремой 9.1, можно записать: $\sqrt[4]{(-7,3)^4} = |-7,3| = 7,3$.

2) $\sqrt[6]{1,2^{12}} = 1,2^2 = 1,44$.

3) Воспользовавшись теоремой 9.2, можно записать: $\sqrt[4]{0,0081 \cdot 625} = \sqrt[4]{0,0081} \cdot \sqrt[4]{625} = 0,3 \cdot 5 = 1,5$.

4) Заменив произведение корней корнем из произведения, получим:

$$\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{16 \cdot 2} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

5) Заменив частное корней корнем из частного, получим:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}} = \sqrt[3]{\frac{24}{375}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}.$$ ◄

Пример 2. Упростите выражение: 1) $\sqrt[4]{a^{28}}$; 2) $\sqrt[6]{64a^{18}}$, если $a \leqslant 0$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[4]{a^{12}}$; 5) $\sqrt[6]{a^2}$.

Решение.

1) Применив теорему 9.1, получим:

$$\sqrt[4]{a^{28}} = \sqrt[4]{(a^7)^4} = |a^7| = \begin{cases} a^7, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a^7, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

2) Имеем: $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3|$. Поскольку по условию $a \leqslant 0$, то $a^3 \leqslant 0$. Тогда $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3| = -2a^3$.

3) Применив теоремы 9.5 и 9.1, можно записать: $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

4) $\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = |a^3|$.

5) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}$. ◄

Пример 3. Вынесите множитель из-под знака корня: 1) $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[8]{b^{43}}$; 3) $\sqrt[8]{-b^{43}}$; 4) $\sqrt[6]{a^6b^7}$, если $a < 0$.

Решение. 1) Представим число, стоящее под знаком корня, в виде произведения двух чисел, одно из которых является кубом рационального числа, и вынесем множитель из-под знака корня:

$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}.$$

2) Из условия следует, что $b \geqslant 0$. Тогда

$\sqrt[8]{b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}b^3} = |b^5|\sqrt[8]{b^3} = b^5\sqrt[8]{b^3}$.

3) Из условия следует, что $b \leqslant 0$. Тогда

$\sqrt[8]{-b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}(-b^3)} = |b^5|\sqrt[8]{-b^3} = -b^5\sqrt[8]{-b^3}$.

4) Из условия следует, что $b \geqslant 0$. Тогда $\sqrt[6]{a^6b^7} = \sqrt[6]{a^6b^6b} = |a||b|\sqrt[6]{b} = -ab\sqrt[6]{b}$. ◄

Пример 4. Внесите множитель под знак корня: 1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $a\sqrt[4]{7}$; 3) $c\sqrt[10]{c^7}$; 4) $3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}$.

Решение. 1) $-2\sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{192}$.

2) Если $a \geqslant 0$, то $a\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{7a^4}$; если $a < 0$, то $a\sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{7a^4}$.

3) Из условия следует, что $c \geqslant 0$. Тогда $c\sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{10}} \cdot \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{17}}$.

4) Из условия следует, что $b \leqslant 0$. Тогда $3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4} \cdot \sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt[4]{-27b^5}$. ◄

Пример 5. Упростите выражение: 1) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}$; 2) $\sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}}$.

Решение.

1) Внесём множитель 4 под знак кубического корня, а затем воспользуемся теоремой о корне из корня:

$$\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4}.$$

Далее, используя теорему 9.6, окончательно получаем:

$$\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}.$$

2) $\sqrt{4-\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{(4-\sqrt{7})^2} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{16-8\sqrt{7}+7} \cdot \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{(23-8\sqrt{7})(23+8\sqrt{7})} = \sqrt[4]{23^2-(8\sqrt{7})^2} = \sqrt[4]{529-448} = \sqrt[4]{81} = 3$. ◄

Пример 6. Сократите дробь: 1) $\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1}$; 2) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$.

Решение. 1) Разложив числитель данной дроби на множители, получаем:

$$\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1}=\frac{\left(\sqrt[6]{b}\right)^2-1}{\sqrt[6]{b}+1}=\frac{\left(\sqrt[6]{b}-1\right)\left(\sqrt[6]{b}+1\right)}{\sqrt[6]{b}+1}=\sqrt[6]{b}-1.$$

2) Разложив числитель и знаменатель данной дроби на множители, получаем:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}. \blacktriangleleft$$

1. Сформулируйте первую теорему о корне из степени.
2. Сформулируйте теорему о корне из произведения.
3. Сформулируйте теорему о корне из частного.
4. Сформулируйте теорему о степени корня.
5. Сформулируйте теорему о корне из корня.
6. Сформулируйте вторую теорему о корне из степени.

Упражнения

9.1. Найдите:

1) $\sqrt[3]{64\cdot125}$; 2) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot7^5}$; 3) $\sqrt[6]{3^{18}\cdot10^{24}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{3^{12}\cdot11^4}{5^8\cdot2^{16}}}$.

9.2. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{0{,}064\cdot343}$; 2) $\sqrt[4]{0{,}0081\cdot11^4}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{7^5}{2^{10}}}$; 4) $\sqrt[8]{\frac{2^{24}\cdot3^{16}}{5^{16}}}$.

9.3. Найдите:

1) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$; 3) $\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$; 5) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}054}\cdot\sqrt[3]{4}$; 4) $\frac{\sqrt[8]{2^{30}\cdot7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6\cdot7^4}}$; 6) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{-9}$.

9.4. Упростите выражение:

1) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$; 3) $\sqrt[14]{(8-y)^{14}}$; 5) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$;

2) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; 4) $\sqrt[6]{y^{12}}$; 6) $\sqrt[12]{n^{36}}$.

9.5. Представьте выражение в виде одночлена, если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$:

1) $\sqrt[3]{27b^9}$; 2) $\sqrt[4]{625a^{12}b^4}$; 3) $\sqrt[6]{729a^{54}b^{18}}$.

9.6. Представьте выражение в виде одночлена, если $m \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$:

1) $\sqrt[3]{125n^{15}}$; 2) $\sqrt[6]{0{,}000064m^{30}n^{42}}$; 3) $\sqrt[8]{m^{72}n^{24}}$.

9.7. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$; 2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\sqrt[15]{c^6}$; 4) $\sqrt[18]{a^8b^{24}}$; 5) $\sqrt[12]{81}$.

9.8. Упростите выражение:

1) $\sqrt[6]{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[21]{a^{14}b^7}$; 5) $\sqrt[9]{64}$.

9.9. Представьте выражение $\sqrt{a}$ в виде корня:

1) четвёртой степени; 3) четырнадцатой степени;
2) шестой степени; 4) восемнадцатой степени.

9.10. Представьте выражение $\sqrt[3]{b}$, $b \geqslant 0$, в виде корня:

1) шестой степени; 3) пятнадцатой степени;
2) девятой степени; 4) тридцатой степени.

9.11. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[3]{16}$; 3) $\sqrt[3]{250}$; 5) $\sqrt[3]{40a^5}$; 7) $\sqrt[3]{-54a^5b^9}$;

2) $\sqrt[4]{162}$; 4) $\sqrt[6]{7290}$; 6) $\sqrt[3]{-a^7}$; 8) $\sqrt[3]{-108a^7b^{10}}$.

9.12. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{80}$; 2) $\sqrt[3]{432}$; 3) $\sqrt[3]{54y^8}$; 4) $\sqrt[4]{243b^9c^{18}}$.

9.13. Внесите множитель под знак корня:

1) $2\sqrt{3}$; 3) $-10\sqrt[4]{0{,}271}$; 5) $5\sqrt[3]{0{,}04x}$; 7) $b\sqrt[5]{3b^3}$;

2) $4\sqrt[3]{5}$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$; 6) $2\sqrt[5]{6y}$; 8) $c\sqrt[3]{\frac{5}{c^2}}$.

9.14. Внесите множитель под знак корня:

1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{320}$; 2) $2\sqrt[4]{7}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 4) $2x^3\sqrt[5]{\frac{x^3}{8}}$.

9.15. Замените выражение на тождественно равное ему:

1) $\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{40}$;

2) $\sqrt[3]{56m} + \sqrt[3]{-189m} - \sqrt[3]{-81n} - 1{,}5\sqrt[3]{24n} + \sqrt[3]{448m}$.

9.16. Упростите выражение:

1) $\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{2\,000}$;

2) $\sqrt[4]{625a} + 3\sqrt[4]{16a} - 2\sqrt[4]{81a} + 4\sqrt[4]{1\,296a}$.

9.17. Упростите выражение:

1) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$; 5) $\sqrt[8]{x^3\sqrt[3]{x^7}}$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}$; 4) $\sqrt[5]{b\sqrt[6]{b}}$; 6) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

9.18. Упростите выражение:

1) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; 3) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 5) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[6]{x^{13}}}$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt[9]{c^2\sqrt[4]{c}}$; 6) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$.

9.19. Упростите выражение:

1) $\left(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}\right)$;

2) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$.

9.20. Упростите выражение

$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)$.

9.21. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt[4]{a^4}=a$; 3) $\sqrt[3]{a^3}=a$; 5) $\sqrt[4]{(a-5)^3}=\left(\sqrt[4]{a-5}\right)^3$;

2) $\sqrt[4]{a^4}=-a$; 4) $\sqrt[3]{a^3}=-a$; 6) $\sqrt[3]{(a-5)^4}=\left(\sqrt[3]{a-5}\right)^4$?

9.22. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt[6]{a^{30}}=a^5$; 3) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{a}\right)^4$;

2) $\sqrt[6]{a^{30}}=-a^5$; 4) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

9.23. При каких значениях a и b выполняется равенство:

1) $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}$; 3) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{b}$;

2) $\sqrt[4]{-ab}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{-b}$; 4) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{-a}\cdot\sqrt[5]{-b}$?

9.24. При каких значениях x выполняется равенство:

1) $\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{x+2}$;

2) $\sqrt[8]{(x-3)(7-x)}=\sqrt[8]{x-3}\cdot\sqrt[8]{7-x}$;

3) $\sqrt[3]{(x-6)(x-10)}=\sqrt[3]{x-6}\cdot\sqrt[3]{x-10}$?

9.25. Упростите выражение:

1) $\sqrt[6]{m^6}$, если $m\geqslant 0$; 5) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, если $b\leqslant 0$;

2) $\sqrt[4]{n^4}$, если $n\leqslant 0$; 6) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, если $y\geqslant 0$;

3) $\sqrt[8]{256k^8}$, если $k\leqslant 0$; 7) $\sqrt{0{,}01a^6b^{10}}$, если $a\leqslant 0$, $b\geqslant 0$;

4) $\sqrt[6]{c^{24}}$; 8) $-1{,}2x\sqrt[6]{64x^{30}}$, если $x\leqslant 0$.

9.26. Упростите выражение:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$; 4) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, если $p\geqslant 0$;

2) $\sqrt[4]{0{,}0001b^{20}}$, если $b\geqslant 0$; 5) $\sqrt[12]{m^{36}n^{60}}$, если $m\leqslant 0$, $n\leqslant 0$;

3) $-5\sqrt{4x^2}$, если $x\leqslant 0$; 6) $ab^2\sqrt[4]{a^{48}b^{36}c^{44}}$, если $b\geqslant 0$, $c\leqslant 0$.

9.27. Вычислите значение выражения:

1) $\left(5\sqrt[3]{4}+0{,}5\sqrt[3]{108}-\sqrt[3]{500}\right)\sqrt[3]{2}$;

2) $\left(2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{100}\right)\left(\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{9}-6\sqrt[3]{72}+2\sqrt[3]{1125}}{\sqrt[3]{9}}$;

4) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}\right)^2}{4+3\sqrt{2}}$.

9.28. Вычислите значение выражения:

1) $\dfrac{5\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$;

2) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{24}-\sqrt[4]{6}\right)^2}{4\sqrt{3}-3\sqrt{6}}$.

9.29. Сократите дробь:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$;

3) $\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt[4]{m}}{m-\sqrt[4]{m^3}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$;

5) $\dfrac{a\sqrt[3]{b^2}-b\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2b^2}}$;

6) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$;

7) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$;

8) $\dfrac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

9) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}+\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}$.

9.30. Сократите дробь:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$;

2) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$;

3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$;

4) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$;

5) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{a^2b}}$;

6) $\dfrac{3+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}}$.

9.31. Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{(x+4)^4}=x+4$;

2) $\sqrt[4]{(1-3x)^8}=(1-3x)^2$;

3) $\sqrt[6]{(x^2-2x-3)^6}=3+2x-x^2$.

9.32. Упростите выражение:

1) $\sqrt[6]{(\sqrt{6}-2)^3}$;

2) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$;

3) $\sqrt[9]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3}$;

4) $\sqrt[6]{(\sqrt{3}-2)^2}$.

9.33. Упростите выражение:

1) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$;

2) $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$;

3) $\sqrt[12]{(\sqrt{11}-3)^3}$;

4) $\sqrt[15]{(\sqrt{7}-3)^3}$.

9.34. Постройте график функции:

1) $y = 2x + \sqrt[6]{x^6}$;
3) $y = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$;
5) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt[6]{x^6}} + 2$;

2) $y = \sqrt[8]{(x-2)^8}$;
4) $y = \sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^2}$;
6) $y = \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^9}$.

9.35. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt[4]{x^4} - x$, если $x \leqslant 0$;
3) $y = \sqrt[4]{-x} \cdot \sqrt[4]{-x^3}$;

2) $y = \sqrt[8]{x^8} - 2x$;
4) $y = \dfrac{\sqrt[6]{x^6}}{x}$.

9.36. Решите уравнение:

1) $\sqrt[6]{x^6} = x - 4$;
2) $\sqrt[10]{x^{10}} = 6 - x$;
3) $2\sqrt[4]{x^4} = x + 3$.

9.37. Решите уравнение:

1) $\sqrt[8]{x^8} = x + 8$;
2) $\sqrt[12]{x^{12}} = 6x - 10$.

9.38. При каких значениях a и b верно равенство:

1) $\sqrt[4]{a^5b^5} = ab\sqrt[4]{ab}$;
2) $\sqrt[4]{a^4b} = a\sqrt[4]{b}$;
3) $\sqrt[4]{a^4b} = -a\sqrt[4]{b}$?

9.39. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$;
5) $\sqrt[4]{162a^4b^8c^{12}}$, если $a > 0$, $c < 0$;

2) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, если $a > 0$;
6) $\sqrt[4]{a^{15}b^{15}}$;

3) $\sqrt[6]{x^6y^7}$, если $x \neq 0$;
7) $\sqrt[8]{-a^{25}b^{50}}$.

4) $\sqrt[4]{32m^{18}n^{17}}$;

9.40. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, если $a \leqslant 0$;
3) $\sqrt[6]{a^7b^7}$, если $a < 0$, $b < 0$;

2) $\sqrt[4]{-625a^5}$;
4) $\sqrt[6]{a^{20}b^{19}}$, если $a > 0$.

9.41. Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt[4]{2}$, если $a \geqslant 0$;
4) $b\sqrt[6]{6}$;

2) $ab\sqrt[6]{\dfrac{6}{a^3b^2}}$, если $b < 0$;
5) $a\sqrt[6]{-a}$;

3) $mn\sqrt[4]{\dfrac{1}{m^3n^3}}$;
6) $ab\sqrt[4]{ab^2}$, если $b \leqslant 0$.

9.42. Внесите множитель под знак корня:

1) $c\sqrt[8]{3}$, если $c \leqslant 0$;
4) $ab\sqrt[8]{\dfrac{3}{a^4b^5}}$, если $a < 0$;

2) $a\sqrt[6]{a}$;
5) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

3) $-ab\sqrt[4]{6}$, если $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;

9.43. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}\cdot\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}}$; 2) $\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6-4\sqrt{2}}$.

9.44. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2\sqrt{6}-1}\cdot\sqrt[4]{25+4\sqrt{6}}$.

9.45. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-1}-\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}}\right):\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}-\dfrac{4\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)$;

4) $\dfrac{\sqrt{a}+27}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[6]{a}-3}{\sqrt[3]{a}-3\sqrt[6]{a}+9}-\dfrac{\sqrt[6]{ab}-9}{\sqrt{a}+27}\right)$.

9.46. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}+1}-\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right):\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}=\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$;

2) $\dfrac{\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$.

9.47. Решите уравнение $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6}=2$.

9.48. Постройте график функции $y=\sqrt[8]{(x+1)^8}+\sqrt{(x-3)^2}$.

9.49. Докажите, что значение выражения является числом рациональным:

1) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

9.50. Докажите, что $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

Готовимся к изучению новой темы

9.51. Представьте в виде степени с основанием a выражение:

1) $\dfrac{(a^3)^6\cdot a^4}{a^{16}}$; 3) $a^{-5}\cdot a^{10}\cdot a^{-12}$; 5) $a^{12}\cdot a^{-20}:a^{-9}$;

2) $a^5\cdot a^{-8}$; 4) $a^{-3}:a^{-15}$; 6) $(a^{-5})^4$.

9.52. Найдите значение выражения:

1) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$;
3) $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$;
5) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^{5}$;

2) $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
4) $9^{-4} \cdot 27^{2}$;
6) $\frac{22^{6} \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^{9}}$.

9.53. Сравните числа:

1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{5}}$;
3) $\sqrt{33}$ и 6;
5) $\sqrt{30}$ и $2\sqrt{7}$;

2) $\sqrt{32}$ и $\sqrt{26}$;
4) $3\sqrt{5}$ и $\sqrt{42}$;
6) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

9.54. Решите графически уравнение:

1) $\sqrt{x} = -x - 1$;
2) $\sqrt{x} = 2 - x$;
3) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$.

Повторите содержание п. 1–3 на с. 326.

§ 10. Определение и свойства степени с рациональным показателем

Напомним определение степени с натуральным показателем:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}},\ n \in \boldsymbol{N},\ n > 1;$$

$$a^1 = a.$$

В 7 классе вы узнали, что степень с натуральным показателем обладает следующими свойствами:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m > n$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^n = a^n b^n$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Позже вы ознакомились с определениями степени с нулевым показателем и степени с отрицательным целым показателем:

$a^0 = 1$, $a \neq 0$;

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Эти определения очень удачные: при таком подходе все пять свойств степени с натуральным показателем остались справедливыми и для степени с целым показателем.

Введём понятие степени с дробным показателем, то есть степени a^r, показатель которой является рациональным числом вида $r = \frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$,

$n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$. Желательно сделать это так, чтобы степень с дробным показателем обладала всеми свойствами степени с целым показателем. Подсказкой для такого определения может служить следующий пример.

Обозначим через x искомое значение степени $2^{\frac{2}{3}}$, то есть $x = 2^{\frac{2}{3}}$. Учитывая свойство $(a^m)^n = a^{mn}$, можем записать: $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Следовательно, x – это кубический корень из числа 2^2, то есть $x = \sqrt[3]{2^2}$. Таким образом, $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Эти соображения подсказывают, что целесообразно принять следующее определение.

Определение

Степенью положительного числа a с рациональным показателем r, представленным в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, $n > 1$, называют число $\sqrt[n]{a^m}$, то есть

$$\boldsymbol{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.}$$

Например, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0,4^{0,3} = 0,4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0,4^3}$.

Заметим, что значение степени a^r, где r – рациональное число, не зависит от того, в виде какой дроби представлено число r. Это можно показать, используя равенства $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ и $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степень с основанием, равным нулю, определяют только для положительного рационального показателя.

Определение

$$\boldsymbol{0^{\frac{m}{n}} = 0, \text{ где } m \in N, n \in N.}$$

Заметим, что, например, запись $0^{-\frac{1}{2}}$ не имеет смысла.

Подчеркнём, что в определениях не идёт речь о степени $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, например, выражение $(-2)^{\frac{1}{3}}$ осталось неопределённым. Вместе с тем выражение $\sqrt[3]{-2}$ имеет смысл. Возникает естественный вопрос: почему бы не считать, что $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Покажем, что такая договорённость привела бы к противоречию:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Получили, что отрицательное число $\sqrt[3]{-2}$ равно положительному числу $\sqrt[6]{4}$.

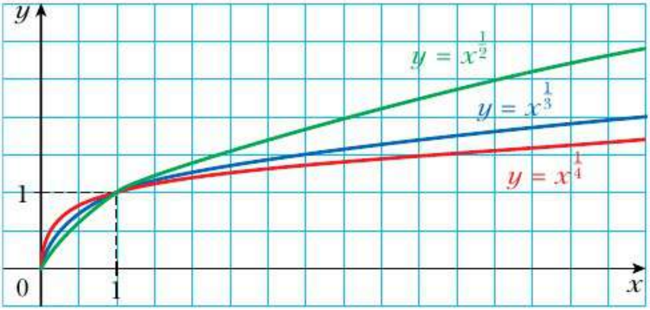
Функцию, которую можно задать формулой $y = x^r$, $r \in \boldsymbol{Q}$, называют **степенной функцией с рациональным показателем**.

Если несократимая дробь $\frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, есть число положительное, то областью определения функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ является промежуток $[0; +\infty)$; а если эта дробь – отрицательное число, то промежуток $(0; +\infty)$.

Функция $y = x^{\frac{1}{2k}}$, $k \in \boldsymbol{N}$, ничем не отличается от функции $y = \sqrt[2k]{x}$. Функции $y = x^{\frac{1}{2k+1}}$ и $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \boldsymbol{N}$, имеют разные области определения. Так, на промежутке $[0; +\infty)$ эти функции совпадают, но на промежутке $(-\infty; 0)$ определена только функция $y = \sqrt[2k+1]{x}$.

На рисунке 10.1 изображены графики функций $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$.

Рис. 10.1



Покажем, что свойства степени с целым показателем остаются справедливыми и для степени с произвольным рациональным показателем.

Теорема 10.1
(произведение степеней)

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняется равенство

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

Доказательство

Запишем рациональные числа p и q в виде дробей с одинаковыми знаменателями: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$. Имеем:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}.$$ ◄

Следствие

Для любого $a > 0$ и любого рационального числа p выполняется равенство

$$\boldsymbol{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

Доказательство

Применяя теорему 10.1, запишем: $a^{-p} \cdot a^p = a^{-p+p} = a^0 = 1$. Отсюда $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. ◄

Теорема 10.2
(частное степеней)

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняется равенство

$$\boldsymbol{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

Доказательство

Применяя теорему 10.1, запишем: $a^q \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^p$. Отсюда $a^{p-q} = a^p : a^q$. ◄

Теорема 10.3
(степень степени)

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняется равенство

$$\boldsymbol{(a^p)^q = a^{pq}}$$

Доказательство

Пусть $p = \frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, и $q = \frac{s}{k}$, $s \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{N}$, $k > 1$. Имеем:

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{k}} = a^{pq}.$$ ◄

Теорема 10.4
(степень произведения и степень частного)

Для любых $a > 0$ и $b > 0$ и любого рационального числа p выполняются равенства

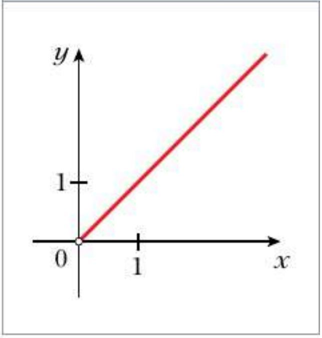
$$(ab)^p = a^p b^p,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 1. Постройте график функции $f(x) = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}$.

Решение. Областью определения функции f является множество $(0; +\infty)$. Используя теорему 10.3, данную функцию можно задать следующими условиями: $f(x) = x$, $D(f) = (0; +\infty)$. График функции изображён на рисунке 10.2. ◄

Рис. 10.2



Рассмотрим примеры, в которых выполняются тождественные преобразования выражений, содержащих степени с рациональным показателем.

Пример 2. Упростите выражение
$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2})$.

Решение.

Раскроем скобки, используя правило умножения многочленов, формулу разности квадратов, а затем приведём подобные слагаемые:

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2}) =$$
$$= \underline{3a^{0,6}} - \underline{\underline{12a^{0,3}b^{0,2}}} + \underline{\underline{a^{0,3}b^{0,2}}} - 4b^{0,4} - \underline{a^{0,6}} + 4b^{0,4} = 2a^{0,6} - 11a^{0,3}b^{0,2}. ◄$$

Пример 3. Разложите на множители выражение $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{4}}$, используя формулу: 1) разности квадратов; 2) разности кубов.

Решение.

1) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{4}} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(b^{\frac{3}{8}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{3}{8}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{3}{8}}\right)$.

2) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{4}} = \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$. ◄

Пример 4. Сократите дробь: 1) $\dfrac{b^{\frac{5}{6}}+3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}-9c^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{32^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$.

Решение.

1) Разложив числитель и знаменатель дроби на множители, получим:

$$\frac{b^{\frac{5}{6}}+3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}-9c^{\frac{1}{2}}}=\frac{b^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{3}}+3c^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(b^{\frac{1}{3}}-3c^{\frac{1}{4}}\right)\left(b^{\frac{1}{3}}+3c^{\frac{1}{4}}\right)}=\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}-3c^{\frac{1}{4}}}.$$

2) Имеем: $\dfrac{32^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{16^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}{2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}=\dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}=\left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=2.$ ◄

Пример 5. Упростите выражение $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+2}{x^{\frac{1}{3}}-2}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-2}{x^{\frac{1}{3}}+2}-\dfrac{16}{x^{\frac{2}{3}}-4}$.

Решение. Выполним замену $x^{\frac{1}{3}}=y$. Тогда данное выражение принимает вид

$$\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}.$$

Это выражение легко упростить. Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $\dfrac{8}{x^{\frac{1}{3}}+2}$. ◄

1. Что называют степенью положительного числа a с показателем $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$?

2. Что называют степенью числа 0 с показателем $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$?

3. Какую функцию называют степенной функцией с рациональным показателем?

4. Сформулируйте свойства степеней с рациональным показателем.

Упражнения

10.1. Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

1) $5^{\frac{1}{3}}$; 2) $b^{-\frac{1}{7}}$; 3) $(ab)^{\frac{4}{7}}$; 4) $(m+n)^{2,5}$.

10.2. Замените степень с дробным показателем корнем:

1) $3^{-\frac{1}{9}}$; 2) $c^{0,2}$; 3) $x^{\frac{6}{7}}$; 4) $(a-2b)^{\frac{9}{16}}$.

10.3. Представьте корень в виде степени с дробным показателем:

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt[7]{6^5}$; 3) $\sqrt[5]{2^{-2}}$; 4) $\sqrt[8]{a^7 - b^7}$.

10.4. Замените корень степенью с дробным показателем:

1) $\sqrt[7]{a^3}$; 2) $\sqrt[14]{m^{-9}}$; 3) $\sqrt[6]{5a^5}$; 4) $\sqrt[4]{x + y}$.

10.5. Найдите значение выражения:

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 3) $3 \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; 5) $0{,}216^{-\frac{1}{3}}$; 7) $27^{\frac{4}{3}}$;

2) $25^{-\frac{1}{2}}$; 4) $-5 \cdot 0{,}01^{-\frac{3}{2}}$; 6) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 8) $32^{-0,2}$.

10.6. Чему равно значение выражения:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; 4) $0{,}125^{-\frac{2}{3}}$?

10.7. Найдите область определения функции:

1) $y = x^{\frac{5}{6}}$; 2) $y = (x - 3)^{2,6}$; 3) $y = (x^2 - 6x - 7)^{-\frac{1}{9}}$.

10.8. Найдите область определения функции:

1) $y = x^{-\frac{2}{3}}$; 2) $y = (x + 1)^{-\frac{7}{12}}$; 3) $y = (x^2 - x - 30)^{\frac{4}{15}}$.

10.9. Найдите значение выражения:

1) $3^{1,8} \cdot 3^{-2,6} \cdot 3^{2,8}$; 4) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}$; 7) $\frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$;

2) $(5^{-0,8})^6 \cdot 5^{4,8}$; 5) $\left(\frac{5}{6}\right)^{4,5} \cdot 1{,}2^{4,5}$; 8) $36^{0,4} \cdot 6^{1,2}$;

3) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}$; 6) $\left(\frac{7}{10}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{700}\right)^{-\frac{1}{3}}$; 9) $\left(4^{-\frac{1}{8}}\right)^{1,6} \cdot 16^{0,6}$.

10.10. Чему равно значение выражения:

1) $5^{3,4} \cdot 5^{-1,8} \cdot 5^{-2,6}$; 3) $\left(9^{\frac{3}{7}}\right)^{4\frac{2}{3}}$; 5) $\left(2\frac{6}{7}\right)^{2,5} \cdot 1{,}4^{2,5}$;

2) $(7^{-0,7})^8 : 7^{-7,6}$; 4) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$; 6) $\frac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$?

10.11. Известно, что a – положительное число. Представьте a в виде:

1) квадрата; 3) шестой степени;

2) куба; 4) восьмой степени.

10.12. Известно, что b – положительное число. Представьте в виде куба выражение:

1) b^2; 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 3) $b^{\frac{1}{3}}$; 4) $b^{-1,8}$; 5) $b^{\frac{7}{11}}$.

10.13. Раскройте скобки:

1) $2a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-4\right)+8a^{\frac{1}{2}}$;

2) $(a^{0,5}-3b^{0,3})(2a^{0,5}+b^{0,3})$;

3) $\left(3b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{3}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{3}{2}}\right)$;

4) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

5) $\left(a^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}a^{-\frac{1}{6}}\right)^2$;

6) $(b^{0,4}+3)^2-6b^{0,4}$;

7) $\left(c^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(c^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{1}{3}}+1\right)$;

8) $\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{5}{6}}+a\right)$;

9) $\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)$;

10) $\left(x^{\frac{2}{9}}-1\right)\left(x^{\frac{4}{9}}+x^{\frac{2}{9}}+1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)$.

10.14. Раскройте скобки:

1) $(5a^{0,4}+b^{0,2})(3a^{0,4}-4b^{0,2})$;

2) $(m^{0,5}+n^{0,5})(m^{0,5}-n^{0,5})$;

3) $\left(a^{\frac{1}{3}}-5b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+5b^{-\frac{1}{4}}\right)$;

4) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

5) $\left(b^{\frac{4}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)^2$;

6) $\left(x^{\frac{1}{6}}+2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+4\right)$;;

7) $(y^{1,5}-4y^{0,5})^2+8y^2$;

8) $\left(a^{\frac{1}{8}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{8}}+1\right)$.

10.15. Вычислите значение выражения:

1) $12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}\cdot(0,5)^{\frac{1}{3}}$;

2) $25^{1,5}+(0,25)^{-0,5}-81^{0,75}$;

3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0,81)^{-0,5}$;

4) $16^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{1,5}$;

5) $\frac{10\,000^{0,4}\cdot 10^{0,5}}{100^{0,3}\cdot 1\,000^{\frac{1}{6}}}$;

6) $\frac{5^{\frac{3}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{6}}}\cdot\frac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{5}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{3}}}$;

7) $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}}:36^{-\frac{1}{6}}$;

8) $\left(\frac{3^{-\frac{5}{6}}\cdot 7^{-\frac{5}{6}}}{21^{-1}\cdot 5^{\frac{1}{3}}}\right)^{-6}$.

10.16. Найдите значение выражения:

1) $\left(343^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$;

2) $10^{\frac{1}{4}}\cdot 40^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$;

3) $0,0016^{-\frac{3}{4}}-0,04^{-\frac{1}{2}}+0,216^{-\frac{2}{3}}$;

4) $\frac{32^{0,24}\cdot 4^{0,7}}{64^{0,6}\cdot 16^{0,25}}$;

5) $\frac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{6}}}\cdot\frac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}}$;

6) $\left(\frac{5^{-\frac{2}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{15^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-1,5}$.

10.17. Решите уравнение:

1) $x^{-\frac{2}{3}} = 0{,}04$; 2) $(x-2)^{\frac{5}{2}} = 32$; 3) $(x^2-2x)^{-\frac{1}{4}} = -1$.

10.18. Решите уравнение:

1) $x^{-1{,}5} = 27$; 2) $(x-1)^{-\frac{2}{5}} = 100$; 3) $(x-5)^{\frac{3}{7}} = 0$.

10.19. Представьте данное выражение в виде разности квадратов и разложите его на множители (переменные принимают только неотрицательные значения):

1) $a-b$; 2) a^3-b^3; 3) $x^{\frac{1}{2}}-3$; 4) $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{7}}$.

10.20. Разложите на множители, используя формулу разности квадратов (переменные принимают только неотрицательные значения):

1) a^5-b^5; 2) $x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}$; 3) $5-c$; 4) $16x^{0{,}3}-25y^{\frac{2}{9}}$.

10.21. Представьте данное выражение в виде суммы кубов и разложите его на множители (переменные принимают только неотрицательные значения):

1) $a+b$; 2) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}$; 3) $a^{\frac{3}{2}}+27$; 4) $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$.

10.22. Разложите на множители, используя формулу разности кубов (переменные принимают только неотрицательные значения):

1) $a-b$; 2) $a^{1{,}5}-b^{1{,}5}$; 3) $m^{0{,}6}-8n^{1{,}8}$; 4) $x^{\frac{6}{7}}-6$.

10.23. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a-5a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-5}$; 4) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$; 7) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}$;

2) $\dfrac{a-4b}{a^{0{,}5}+2b^{0{,}5}}$; 5) $\dfrac{4c^{\frac{2}{3}}-12c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+9d^{\frac{2}{3}}}{2c^{\frac{1}{3}}-3d^{\frac{1}{3}}}$; 8) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}+7a^{\frac{1}{2}}}{a-49a^{\frac{1}{2}}}$;

3) $\dfrac{a-b}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}$; 6) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 9) $\dfrac{30^{\frac{1}{5}}-6^{\frac{1}{5}}}{10^{\frac{1}{5}}-2^{\frac{1}{5}}}$.

10.24. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+2}$; 4) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$; 7) $\dfrac{a-125}{a^{\frac{2}{3}}-25}$;

2) $\dfrac{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{4}}-m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}}$; 5) $\dfrac{a^{0{,}5}-b^{0{,}5}}{a-b}$; 8) $\dfrac{m^{\frac{7}{6}}-36m^{\frac{5}{6}}}{m^{\frac{1}{2}}-6m^{\frac{1}{3}}}$;

3) $\dfrac{a-b^2}{a-a^{\frac{1}{2}}b}$; 6) $\dfrac{x^{3{,}5}y^{2{,}5}-x^{2{,}5}y^{3{,}5}}{x+2x^{0{,}5}y^{0{,}5}+y}$; 9) $\dfrac{24^{\frac{1}{4}}-8^{\frac{1}{4}}}{6^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}}$.

10.25. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b}$;

2) $\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}+\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a^{0,5}-b^{0,5}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{6}}}\cdot\dfrac{a-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}}$;

4) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}$.

10.26. Упростите выражение:

1) $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\left(1-a^{\frac{1}{36}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{36}}+a^{\frac{1}{18}}\right)+\dfrac{4-a^{\frac{1}{6}}}{2-a^{\frac{1}{12}}}$;

3) $\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right):\left(\dfrac{b^{\frac{5}{4}}}{a}-\dfrac{b}{a^{\frac{3}{4}}}\right)$;

4) $\dfrac{m^{\frac{5}{2}}-m^{\frac{3}{2}}}{m^3-m^{\frac{5}{2}}}-\dfrac{m^{\frac{1}{2}}+m}{m^2+m^{\frac{3}{2}}}$.

10.27. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right):\dfrac{a^{0,5}}{a^{0,5}+1}=\dfrac{2}{a-1}$;

2) $\dfrac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{a^2-b^2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}=2a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}$.

10.28. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^{\frac{3}{2}}+mn^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{m}{n}=n^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}}$;

2) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-1}-b^{-1}}-\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}\right):\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$.

Готовимся к изучению новой темы

10.29. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3x}-2=0$;

2) $\sqrt{3x-7}=0$;

3) $\sqrt{4x-1}=6$;

4) $\dfrac{56}{\sqrt{x}}=8$;

5) $\dfrac{22}{\sqrt{x+3}}=11$;

6) $\sqrt{x^2-64}=6$;

7) $\sqrt{1+\sqrt{3+x}}=4$;

8) $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=0$;

9) $(x-2)\sqrt{x+2}=0$.

§ 11. Иррациональные уравнения

Рассмотрим функцию $y = x^3$. Она является возрастающей, а следовательно, обратимой. Поэтому функция $y = x^3$ каждое своё значение принимает только один раз. Иными словами: из равенства $x_1^3 = x_2^3$ следует, что $x_1 = x_2$. А так как из равенства $x_1 = x_2$ следует, что $x_1^3 = x_2^3$, то можно утверждать, что *если обе части уравнения возвести в куб, то получим уравнение, равносильное данному.*

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x+1} = -3$.

Решение. Возведя обе части уравнения в куб, получим уравнение, равносильное данному. Имеем:

$$\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^3 = (-3)^3;$$
$$2x + 1 = -27;$$
$$x = -14.$$

Ответ: -14. ◂

Поскольку функция $y = x^{2k-1}$, $k \in \boldsymbol{N}$, является обратимой, то вывод о возведении обеих частей уравнения в куб можно обобщить в виде следующей теоремы.

Теорема 11.1

Если обе части уравнения возвести в нечётную степень, то получим уравнение, равносильное данному.

Доказательство

Покажем, что уравнения

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

и

$$(f(x))^{2k-1} = (g(x))^{2k-1},\ k \in \boldsymbol{N}, \qquad (2)$$

равносильны.

Пусть число α — корень уравнения (1). Тогда имеем верное числовое равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$. Отсюда можно записать:

$$(f(\alpha))^{2k-1} = (g(\alpha))^{2k-1}.$$

Это значит, что число α является корнем уравнения (2).

Пусть число β — корень уравнения (2). Тогда получаем, что $(f(\beta))^{2k-1} = (g(\beta))^{2k-1}$. Поскольку функция $y = x^{2k-1}$, $k \in \boldsymbol{N}$, является обратимой, то $f(\beta) = g(\beta)$. Следовательно, число β — корень уравнения (1).

Мы показали, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2) и, наоборот, каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1). Это значит, что уравнения (1) и (2) равносильны. ◂

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt[7]{x^2-2}=\sqrt[7]{x}$.

Решение. Возведём обе части данного уравнения в седьмую степень. Получим равносильное уравнение:

$$\left(\sqrt[7]{x^2-2}\right)^7=\left(\sqrt[7]{x}\right)^7.$$

Отсюда $x^2-2=x$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$, $x_2=2$.

Ответ: -1; 2. ◄

Уравнения, рассмотренные в примерах 1 и 2, содержат переменную под знаком корня. Такие уравнения называют **иррациональными**.

Вот ещё примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt{x-3}=2;$$

$$\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}+1=0;$$

$$\sqrt{3-x}=\sqrt[3]{2+x}.$$

При решении примеров 1 и 2 нам приходилось преобразовывать уравнения, содержащие корни нечётной степени. Рассмотрим уравнения, содержащие корни чётной степени.

Пример 3. Решите уравнение $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$. (3)

Решение. Применив формулу $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, заменим данное уравнение таким:

$$3x+4=x-2. \qquad (4)$$

Отсюда $x=-3$.

Однако проверка показывает, что число -3 не является корнем исходного уравнения. Значит, уравнение (3) не имеет корней.

Ответ: корней нет. ◄

Причина появления постороннего корня при решении примера 3 заключалась в том, что, применив формулу $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, мы не учли ограничение $a\geqslant 0$. Это привело к расширению области определения уравнения. Поэтому уравнение (4) оказалось следствием уравнения (3).

В основе ещё одной причины возникновения посторонних корней лежит то, что функция $y=x^{2k}$, $k\in\boldsymbol{N}$, не является обратимой. Поясним сказанное. Из равенства $x_1^{2k}=x_2^{2k}$ не обязательно следует, что $x_1=x_2$. Например, $(-2)^4=2^4$, но $-2\neq 2$. В то же время из равенства $x_1=x_2$ следует равенство $x_1^{2k}=x_2^{2k}$.

Приведённые рассуждения подсказывают, что справедлива следующая теорема.

Теорема 11.2

При возведении обеих частей уравнения в чётную степень получаем уравнение, являющееся следствием данного.

Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 11.1, докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{4+3x} = x$.

Решение. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение, являющееся следствием данного:

$$4 + 3x = x^2;$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0;\ x_1 = -1,\ x_2 = 4.$$

Проверка показывает, что число -1 — посторонний корень, а число 4 удовлетворяет данному уравнению.

Ответ: 4. ◄

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$.

Решение. Возведём обе части данного уравнения в квадрат:

$$2x - 3 + 2\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} + 4x + 1 = 16.$$

Отсюда $\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} = 9 - 3x$.

Переходя к уравнению-следствию, получаем:

$$8x^2 - 10x - 3 = 81 - 54x + 9x^2;$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0;\ x_1 = 42,\ x_2 = 2.$$

Проверка показывает, что число 42 — посторонний корень, а число 2 удовлетворяет данному уравнению.

Ответ: 2. ◄

Пример 6. Решите уравнение $\sqrt{x^3+1} + 2\sqrt[4]{x^3+1} - 3 = 0$.

Решение. Пусть $\sqrt[4]{x^3+1} = t$. Тогда $\sqrt{x^3+1} = t^2$. Теперь исходное уравнение принимает вид

$$t^2 + 2t - 3 = 0.$$

Отсюда $t = -3$ или $t = 1$.

Случай $t = -3$ приводит к уравнению $\sqrt[4]{x^3+1} = -3$, не имеющему решений.

Случай $t = 1$ приводит к уравнению $\sqrt[4]{x^3+1} = 1$.

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: 0. ◄

Напомним, что с методом, использованным при решении последнего уравнения, вы знакомы ещё из курса алгебры 8–9 классов. Этот метод называют *методом замены переменной*.

1. Какое уравнение называют иррациональным?
2. Обе части уравнения возвели в нечётную степень. Будут ли исходное и полученное уравнения равносильными?
3. Обе части уравнения возвели в чётную степень. Будут ли исходное и полученное уравнения равносильными?
4. Как можно выявить посторонние корни уравнения?

Упражнения

11.1. Объясните, почему не имеет корней уравнение:

1) $\sqrt{x-2}+1=0$;
2) $\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x-1}=-2$;
3) $\sqrt{x-4}+\sqrt{1-x}=5$;
4) $\sqrt[4]{x-6}+\sqrt{6-x}=1$.

11.2. Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{2x-2}=2$;
2) $\sqrt[3]{x-4}=2$;
3) $\sqrt[5]{x-6}=-3$;
4) $\sqrt[3]{x^3-2x+3}=x$;
5) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$;
6) $\sqrt[3]{x^2+15}=2\sqrt[3]{x+1}$.

11.3. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-3}=4$;
2) $\sqrt{3x^2-x-15}=3$;
3) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

11.4. Решите уравнение:

1) $\sqrt[7]{2x-1}=\sqrt[7]{3-x}$;
2) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x}$;
3) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-3}$;
4) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x^2+4x-16}$.

11.5. Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{x+3}=\sqrt[4]{2x-3}$;
2) $\sqrt{4x-5}=\sqrt{1-x}$;
3) $\sqrt[5]{x^2-25}=\sqrt[5]{2x+10}$;
4) $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$.

11.6. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2-x}=x$;
2) $\sqrt{x+1}=x-1$;
3) $\sqrt{3x-2}=x$;
4) $\sqrt{2x^2-3x-10}=x$;
5) $2\sqrt{x+5}=x+2$;
6) $\sqrt{15-3x}-1=x$;
7) $x-\sqrt{2x^2+x-21}=3$;
8) $x+2+\sqrt{8-3x-x^2}=0$.

11.7. Решите уравнение:

1) $\sqrt{10-3x}=-x$;
2) $x=\sqrt{x+5}+1$;
3) $\sqrt{2x^2+5x+4}=2x+2$;
4) $3\sqrt{x+10}-11=2x$;
5) $x-\sqrt{3x^2-11x-20}=5$.

11.8. Решите уравнение:

1) $\sqrt{(2x+3)(x-4)}=x-4$;
2) $\sqrt{(x-2)(2x-5)}+2=x$;
3) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12$;
4) $(x+1)\sqrt{x^2-5x+5}=x+1$.

11.9. Решите уравнение:

1) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}=3x-1$;
2) $(x-1)\sqrt{x^2-3x-3}=5x-5$.

11.10. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$;
2) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-6=0$;
3) $2x-7\sqrt{x}-15=0$;
4) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=4$;
5) $2\sqrt{x+1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x+1}}$;
6) $x^2-x+9+\sqrt{x^2-x+9}=12$;
7) $\sqrt[3]{x^2-4x+4}-2\sqrt[3]{x-2}-3=0$;
8) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}+1}=2$;
9) $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-1}}+7\sqrt{\dfrac{x-1}{x+5}}=8$;
10) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

11.11. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $x-\sqrt{x}-12=0$;
2) $\sqrt[3]{x^2}+8=9\sqrt[3]{x}$;
3) $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=1$;
4) $\sqrt{x+5}-3\sqrt[4]{x+5}+2=0$;
5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+1}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}+3}=1$;
6) $\sqrt[6]{9-6x+x^2}+2\sqrt[6]{3-x}-8=0$;
7) $x^2-x+4+\sqrt{x^2-x+4}=6$;
8) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-3}}+\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+2}}=2{,}5$.

11.12. Решите уравнение:

1) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$;
2) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$.

11.13. Решите уравнение:

1) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2;$
2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1;$
3) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1;$
4) $2\sqrt{2-x}-\sqrt{7-x}=1.$

11.14. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2;$
2) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}=2.$

11.15. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3;$
2) $\sqrt{x-7}+\sqrt{x-1}=4;$
3) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=1;$
4) $\sqrt{13-4x}+\sqrt{x+3}=5.$

11.16. Решите уравнение:

1) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}=3;$
2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+5}=3.$

11.17. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x};$
2) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1};$
3) $2\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-9}.$

11.18. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{8-x};$
2) $\sqrt{6x-11}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x+3}.$

11.19. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $x^2-5x+16-3\sqrt{x^2-5x+20}=0;$
2) $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0;$
3) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7;$
4) $\sqrt{3x^2-9x-26}=12+3x-x^2;$
5) $2x^2+6x-3\sqrt{x^2+3x-3}=5;$
6) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}+\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=72.$

11.20. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $x^2-4x-3\sqrt{x^2-4x+20}+10=0;$
2) $2\sqrt{x^2-3x+11}=4+3x-x^2;$
3) $\sqrt{2x^2-6x+40}=x^2-3x+8;$
4) $5x^2+10x+\sqrt{x^2+2x-15}=123.$

11.21. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=6;$
2) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}=4.$

11.22. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=6$;

2) $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}-\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=2$.

Упражнения для повторения

11.23. Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, \text{ если } x<1,\\ x-1, \text{ если } x\geqslant 1.\end{cases}$ Пользуясь построенным графиком, определите промежутки возрастания и убывания данной функции.

11.24. Задайте формулой линейную функцию f, если $f(-2)=5$, $f(2)=-3$.

§ 12. Метод равносильных преобразований для решения иррациональных уравнений

Вы знаете, что посторонние корни уравнения можно выявить в результате проверки.

Когда идёт речь о проверке как об этапе решения уравнения, невозможно избежать проблемы её технической реализации. Например, число $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$ является корнем уравнения $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$. Чтобы в этом убедиться, надо выполнить значительную вычислительную работу.

Для подобных ситуаций возможен другой путь решения — метод равносильных преобразований.

Теорема 12.1

Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

Воспользовавшись доказательством теоремы 11.1, докажите эту теорему самостоятельно.

Замечание. Уравнение $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ также равносильно системе

$$\begin{cases}f(x)=g(x),\\ g(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

Выбор соответствующей системы, как правило, связан с тем, какое из неравенств, $f(x)\geqslant 0$ или $g(x)\geqslant 0$, решить легче.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x - 1}$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 3x = x - 1, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{3}, \\ x = 2 - \sqrt{3}, \end{array}\right. \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

Ответ: $2 + \sqrt{3}$. ◄

Теорема 12.2

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 11.1, докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{x + 7} = x - 3$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x + 7 = (x - 3)^2, \\ x - 3 \geqslant 0. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0, \\ x \geqslant 3; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}, \\ x = \dfrac{7 - \sqrt{41}}{2}, \end{array}\right. \\ x \geqslant 3. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}$. ◄

Теоремы 12.1 и 12.2 можно обобщить, руководствуясь следующим утверждением: если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то из равенства $a^{2k} = b^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, следует, что $a = b$.

Теорема 12.3

Если для любого $x \in M$ выполняются неравенства $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$, то уравнения $f(x) = g(x)$ и $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in N$, равносильны на множестве M.

Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 11.1, докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{2x-3}+\sqrt{6x+1}=4$.

Решение. Областью определения этого уравнения является множество $M=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. На этом множестве обе части данного уравнения принимают неотрицательные значения. Поэтому данное уравнение на множестве M равносильно уравнению

$$\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{6x+1}\right)^2=4^2.$$

Отсюда $2x-3+2\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{6x+1}+6x+1=16$. После упрощений получаем $\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{6x+1}=9-4x$.

Левая часть последнего уравнения на множестве $M=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ принимает неотрицательные значения. Тогда правая часть, то есть $9-4x$, должна также быть неотрицательной. Отсюда $9-4x\geqslant 0$; $x\leqslant\frac{9}{4}$. Поэтому на множестве $M_1=\left[\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right]$ обе части уравнения $\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{6x+1}=9-4x$ принимают неотрицательные значения. Следовательно, по теореме 12.3 это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(2x-3)(6x+1)=(9-4x)^2,\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{9}{4};\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-14x+21=0,\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{9}{4};\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=7-2\sqrt{7},\\ x=7+2\sqrt{7},\end{array}\right.\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{9}{4}.\end{cases}$$

Из последней системы получаем $x=7-2\sqrt{7}$.

Ответ: $7-2\sqrt{7}$. ◄

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$.

Решение. Областью определения данного уравнения является множество $M=\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. Обе части данного уравнения на этом множестве принимают неотрицательные значения. Поэтому данное уравнение на множестве M равносильно уравнению $\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2$. Отсюда $2\sqrt{2x-5}\cdot\sqrt{x+2}=4-x$.

Воспользовавшись теоремой 12.3, получаем:

$$\begin{cases}4(2x-5)(x+2)=(4-x)^2,\\ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} 7x^2 + 4x - 56 = 0, \\ \frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 4; \end{cases}$ $\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \frac{-2 - 6\sqrt{11}}{7}, \\ x = \frac{-2 + 6\sqrt{11}}{7}, \end{array} \right. \\ \frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 4. \end{array} \right.$

Ответ: $\frac{-2 + 6\sqrt{11}}{7}$. ◄

Упражнения

12.1. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+4} = 6$;
2) $\sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{x-2} = 3$;
3) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+2} = 4$;
4) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} = x$;
5) $\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}} = \sqrt{x-4}$;
6) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x} = \frac{36}{\sqrt{x-9}}$;
7) $\sqrt{7-x} + \frac{12}{\sqrt{7-x}} = 2\sqrt{5x+37}$.

12.2. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x+8} = 4$;
2) $x - 1 = \sqrt{2x-5} \cdot \sqrt{x+1}$;
3) $\frac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{3x+1}$;
4) $\frac{12}{\sqrt{x+10}} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{x+10}$.

12.3. Решите уравнение:

1) $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$;
2) $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$;
3) $\sqrt{x^2+8} = 2x+1$;
4) $\sqrt{2x^2-7x+5} = 1-x$;
5) $\sqrt{x} = x-1$;
6) $\sqrt{x^2-1} = 3-2x$.

12.4. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2-4x+13} = \frac{1}{2}x+2$;
2) $\sqrt{2x^2+8x+7} - 2 = x$;
3) $\sqrt{x+2} = 1-x$.

12.5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 2$;
2) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$;
3) $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} = 1$;
4) $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$;
5) $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4$;
6) $\sqrt{3x-1} + \sqrt{x+3} = 2$;
7) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$.

12.6. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$;
2) $\sqrt{x+11}-\sqrt{2x+1}=2$;
3) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{16-3x}=5$.

12.7. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$;
2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

12.8. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}=0$;
2) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$.

Упражнения для повторения

12.9. Решите уравнение:

1) $x^4-9x^2+20=0$;
2) $x^4-5x^2-36=0$.

12.10. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=0$;
2) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$;
3) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{3x}{2(x-1)}=-\dfrac{5}{2}$;
4) $\dfrac{x^2}{(2x+3)^2}-\dfrac{3x}{2x+3}+2=0$.

§ 13. Иррациональные неравенства

Рассмотрим теоремы, с помощью которых решают основные типы иррациональных неравенств. Доказательства этих теорем аналогичны доказательству теоремы 11.1. Вы можете доказать их самостоятельно.

Теорема 13.1

Неравенство вида $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3x+1}\geqslant\sqrt{3x-4}$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$\begin{cases} x^2-3x+1\geqslant 3x-4, \\ 3x-4\geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x^2-6x+5\geqslant 0, \\ x\geqslant\dfrac{4}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geqslant 5, \\ x\leqslant 1, \end{array}\right. \\ x\geqslant\dfrac{4}{3}. \end{cases}$ Решение этой системы проиллюстрировано на рисунке 13.1. Получаем: $x\geqslant 5$.

Рис. 13.1

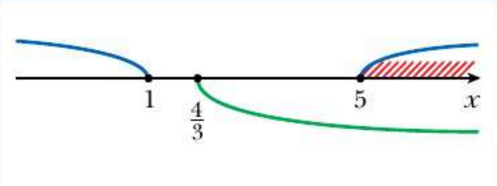
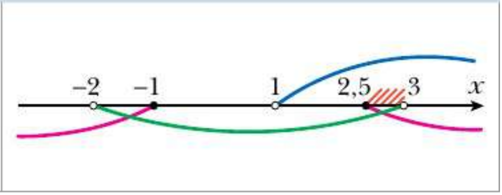


Рис. 13.2



Ответ: $[5; +\infty)$. ◂

Теорема 13.2

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

__Пример 2.__ Решите неравенство $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 < (x-1)^2, \\ x - 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \begin{cases} -2 < x < 3, \\ x > 1, \\ x \leqslant -1 \text{ или } x \geqslant 2{,}5. \end{cases}$$

Решение этой системы проиллюстрировано на рисунке 13.2.

Получаем: $2{,}5 \leqslant x < 3$.

Ответ: $[2{,}5; 3)$. ◂

Теорема 13.3

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

__Пример 3.__ Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 7x + 12} > 6 - x$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} 6 - x < 0, \\ x^2 + 7x + 12 \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 6, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -4, \\ x \geqslant -3. \end{array}\right. \end{cases}$ Отсюда $x > 6$.

2) $\begin{cases} 6 - x \geqslant 0, \\ x^2 + 7x + 12 > (6 - x)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 6, \\ x > \dfrac{24}{19}. \end{cases}$ Отсюда $\dfrac{24}{19} < x \leqslant 6$.

Для завершения решения задачи осталось объединить множества $(6; +\infty)$ и $\left(\dfrac{24}{19};\ 6\right]$.

Ответ: $\left(\dfrac{24}{19}; +\infty\right)$. ◄

Упражнения

13.1. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x-1} > 4$;
2) $\sqrt{x-1} < 4$;
3) $\sqrt{x-1} > -4$;
4) $\sqrt{x-1} < -4$.

13.2. Решите неравенство:

1) $\sqrt{2x-4} \geqslant \sqrt{5-x}$;
2) $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$;
3) $\sqrt{x^2+x} < \sqrt{x^2+1}$;
4) $\sqrt{x^2-3x+1} > \sqrt{2x-3}$;
5) $\sqrt{8-5x} \geqslant \sqrt{x^2-16}$;
6) $\sqrt{x^2-3x+2} < \sqrt{2x^2-3x+1}$.

13.3. Решите неравенство:

1) $\sqrt{3x-2} < \sqrt{x+6}$;
2) $\sqrt{2x^2+6x-3} \geqslant \sqrt{x^2+4x}$;
3) $\sqrt{x^2+3x-10} < \sqrt{x-2}$.

13.4. Решите неравенство:

1) $x > \sqrt{24-5x}$;
2) $\sqrt{2x+7} \leqslant x+2$;
3) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$;
4) $3 - x > 3\sqrt{1-x^2}$;
5) $\sqrt{x^2+3x+3} < 2x+1$;
6) $\sqrt{7x-x^2-6} < 2x+3$.

13.5. Решите неравенство:

1) $\sqrt{9x-20} < x$;
2) $\sqrt{x+61} < x+5$;
3) $2\sqrt{4-x^2} \leqslant x+4$;
4) $\sqrt{x^2+4x-5} < x-3$.

13.6. Решите неравенство:

1) $\sqrt{2-x} > x$;
2) $\sqrt{x+7} \geqslant x+1$;
3) $\sqrt{x^2-1} > x$;
4) $\sqrt{x^2-2x} \geqslant 4-x$;
5) $\sqrt{x^2+x-2} > x$;
6) $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

13.7. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x+2} > x$;
2) $\sqrt{2x+14} > x+3$;
3) $\sqrt{x^2-5x-24} \geqslant x+2$;
4) $\sqrt{x^2+4x-5} > x-3$.

Упражнения для повторения

13.8. Решите неравенство:

1) $(x^2+6x+5)(x^2-3x) > 0$;
2) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-64} \geqslant 0$;
3) $\dfrac{x^2+5x}{x-1} \geqslant \dfrac{14}{x-1}$;
4) $\dfrac{x^2-4x}{x-2} \leqslant 3$.

13.9. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 2x^2+13x-7 \leqslant 0, \\ 15-3x \leqslant 0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2+6x-40 < 0, \\ x^2+3x-18 \geqslant 0. \end{cases}$

Когда сделаны уроки

Примеры решения более сложных иррациональных уравнений и неравенств, а также их систем

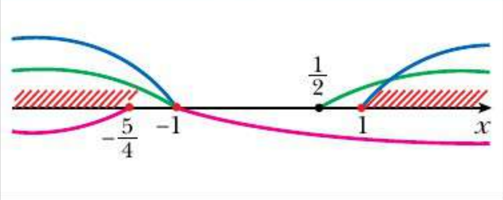
Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{4x^2+9x+5} - \sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{x^2-1}$.

Решение. Разложим квадратные трёхчлены, стоящие под радикалами, на множители: $\sqrt{(x+1)(4x+5)} - \sqrt{(x+1)(2x-1)} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$.

Теперь важно не сделать распространённую ошибку, а именно применить теорему о корне из произведения в таком виде: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. На самом деле записанная формула справедлива лишь для $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Если же $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

Поскольку областью определения данного уравнения является множество $\left(-\infty; -\dfrac{5}{4}\right] \cup [1; +\infty) \cup \{-1\}$ (рис. 13.3), то данное уравнение равносильно совокупности двух систем и одного уравнения.

Рис. 13.3



1) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4x+5} - \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}. \end{cases}$ Отсюда

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}; \end{cases} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ 2\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{x-1} = x+7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2 + 14x + 49; \end{cases} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ 7x^2 - 26x - 45 = 0; \end{cases} \begin{cases} x \geqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\dfrac{9}{7}; \end{array} \right. \end{cases} \quad x = 5.$$

2) $\begin{cases} x \leqslant -\dfrac{5}{4}, \\ \sqrt{-x-1} \cdot \sqrt{-4x-5} - \sqrt{-x-1} \cdot \sqrt{-2x+1} = \sqrt{-x+1} \cdot \sqrt{-x-1}. \end{cases}$ Отсюда

$$\begin{cases} x \leqslant -\dfrac{5}{4}, \\ \sqrt{-2x+1} + \sqrt{-x+1} = \sqrt{-4x-5}; \end{cases} \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{5}{4}, \\ 2\sqrt{-2x+1} \cdot \sqrt{-x+1} = -x-7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant -7, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2 + 14x + 49; \end{cases} \begin{cases} x \leqslant -7, \\ 7x^2 - 26x - 45 = 0; \end{cases} \begin{cases} x \leqslant -7, \\ \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\dfrac{9}{7}. \end{array} \right. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет.

3) $x + 1 = 0$. Отсюда $x = -1$.

Ответ: -1; 5. ◄

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x + 2\sqrt{x^2-16} - 12$.

Решение. Пусть $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = t$. Тогда, возводя в квадрат обе части последнего равенства, получим:

$$2x + 2\sqrt{x^2-16} = t^2.$$

Теперь данное уравнение можно переписать так: $t = t^2 - 12$. Отсюда $t = 4$ или $t = -3$.

Очевидно, что уравнение $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = -3$ не имеет решений. Следовательно, исходное уравнение равносильно такому: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 4$. Далее,

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ 2x + 2\sqrt{x^2-16} = 16; \end{cases} \begin{cases} x \geqslant 4, \\ \sqrt{x^2-16} = 8 - x; \end{cases} \begin{cases} 4 \leqslant x \leqslant 8, \\ x^2 - 16 = 64 - 16x + x^2; \end{cases} \quad x = 5.$$

Ответ: 5. ◄

Пример 3. Решите уравнение $2(x+1) - x\sqrt{x+1} - x^2 = 0$.

Решение. Поскольку число 0 не является корнем данного уравнения, то уравнение $\frac{2(x+1)}{x^2} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} - 1 = 0$ равносильно данному. Пусть $\frac{\sqrt{x+1}}{x} = t$, тогда получаем: $2t^2 - t - 1 = 0$. Отсюда $t = 1$ или $t = -\frac{1}{2}$. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = 1, \\ \frac{\sqrt{x+1}}{x} = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ x + 1 = x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ 4x + 4 = x^2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ x = 2 - 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $2 - 2\sqrt{2}$. ◄

Пример 4. Решите неравенство $(x-3)\cdot\sqrt{x^2+4} \leqslant x^2 - 9$.

Решение. Перепишем данное неравенство в таком виде:

$$(x-3)\left(\sqrt{x^2+4} - x - 3\right) \leqslant 0.$$

Это неравенство равносильно совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} x - 3 \geqslant 0, \\ \sqrt{x^2+4} \leqslant x + 3. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x^2 + 4 \leqslant x^2 + 6x + 9; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \geqslant -\frac{5}{6}; \end{cases}$ $x \geqslant 3$.

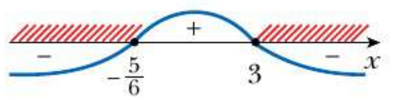
2) $\begin{cases} x - 3 \leqslant 0, \\ \sqrt{x^2+4} \geqslant x + 3. \end{cases}$ Второе неравенство системы равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x + 3 < 0, \\ \begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ x^2 + 4 \geqslant (x+3)^2. \end{cases} \end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} x < -3, \\ -3 \leqslant x \leqslant -\frac{5}{6}; \end{array}\right.$ $x \leqslant -\frac{5}{6}$. Тогда имеем: $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \leqslant -\frac{5}{6}; \end{cases}$ $x \leqslant -\frac{5}{6}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; +\infty)$. ◄

Неравенство примера 4 можно решить иначе, используя метод интервалов (см. § 5). Действительно, решив уравнение $(x-3)\left(\sqrt{x^2+4} - x - 3\right) = 0$, получаем два корня: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{5}{6}$. Решение данного неравенства проиллюстрировано на рисунке 13.4.

При решении иррациональных неравенств можно пользоваться следующей теоремой.

Рис. 13.4



Теорема

Если для любого $x \in M$ выполняются неравенства $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$, то неравенства $f(x) > g(x)$ и $(f(x))^{2k} > (g(x))^{2k}$, $k \in N$, равносильны на множестве M.

Пример 5. Решите неравенство $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} \leqslant 2\sqrt{x}$.

Решение. Обе части данного неравенства принимают неотрицательные значения на множестве $M = [3; +\infty)$, являющемся областью определения этого неравенства. Поэтому данное неравенство на множестве M равносильно неравенству

$$\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3}\right)^2 \leqslant \left(2\sqrt{x}\right)^2.$$

Отсюда $2\sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{x-3} \leqslant x + 2$.

На множестве $M = [3; +\infty)$ обе части последнего неравенства принимают неотрицательные значения. Поэтому можно воспользоваться сформулированной выше теоремой. Получаем:

$$\begin{cases} 4(2x+1)(x-3) \leqslant (x+2)^2, \\ x \geqslant 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x^2 - 24x - 16 \leqslant 0, \\ x \geqslant 3; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{4}{7} \leqslant x \leqslant 4, \\ x \geqslant 3; \end{cases} \quad 3 \leqslant x \leqslant 4.$$

Ответ: $[3; 4]$. ◄

Пример 6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$

Решение. Запишем: $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ x + 2y + x - y + 2 = 9. \end{cases}$

Пусть $\sqrt[3]{x+2y} = u$, $\sqrt[3]{x-y+2} = v$. Имеем:

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^3 + v^3 = 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} u^2 - uv + v^2 = 3, \\ u + v = 3; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1, \\ v = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} u = 2, \\ v = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Исходная система равносильна совокупности двух систем.

1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}=1,\\ \sqrt[3]{x-y+2}=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x+2y=1,\\ x-y+2=8;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{13}{3},\\ y=-\dfrac{5}{3}.\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}=2,\\ \sqrt[3]{x-y+2}=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x+2y=8,\\ x-y+2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\ y=3.\end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{13}{3}; -\dfrac{5}{3}\right)$; $(2; 3)$.

Упражнения

1. Решите уравнение $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2+2x-8}=\sqrt{x^2-6x+8}$.

2. Решите уравнение $\sqrt{2x^2+5x+2}-\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x+6}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$.

4. Решите уравнение $x+\sqrt{(x+6)(x-2)}=2+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}$.

5. Решите уравнение $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x)$.

6. Решите уравнение $6x^2-5x\sqrt{x+3}+x+3=0$.

7. Решите уравнение $\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{(6-x)^2}-\sqrt[3]{(x+3)(6-x)}=3$.

8. Решите уравнение $\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{(x-5)^2}+\sqrt[3]{(x+4)(x-5)}=3$.

9. Решите неравенство $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)}\geqslant 0$.

10. Решите неравенство $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\leqslant 0$.

11. Решите неравенство $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$.

12. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}\leqslant\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

13. Решите неравенство $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$.

14. Решите неравенство $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.

15. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1,\\ 3x+2y=4.\end{cases}$

16. Решите систему уравнений $\begin{cases}9x^2+\sqrt{9x^2+2y+1}=1-2y,\\ 6x+y=2.\end{cases}$

Итоги главы 2

Степенная функция

Функцию $y = x^n$, $n \in N$, называют степенной функцией с натуральным показателем.

Функцию $y = x^n$, $n \in Z$, называют степенной функцией с целым показателем.

Корень n-й степени

Корнем n-й степени из числа a, где $n \in N$, $n > 1$, называют такое число, n-я степень которого равна a.

Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a, где $n \in N$, $n > 1$, называют такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Для любого a и $k \in N$ выполняются равенства: $\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$; $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in N$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Если $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in N$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$; $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, $k > 1$, то $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$.

Степень с рациональным показателем

Степенью положительного числа a с показателем $\dfrac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, $n > 1$, называют число $\sqrt[n]{a^m}$, то есть $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; $0^{\frac{m}{n}} = 0$, где $m \in N$, $n \in N$.

Функцию, которую можно задать формулой $y = x^r$, $r \in Q$, называют степенной функцией с рациональным показателем.

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняются равенства: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$; $a^p : a^q = a^{p-q}$; $(a^p)^q = a^{pq}$.

Для любых $a > 0$ и $b > 0$ и любого рационального числа p выполняются равенства: $(ab)^p = a^p b^p$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$.

Иррациональные уравнения

Уравнение, содержащее переменную под знаком корня, называют иррациональным.

Если обе части уравнения возвести в нечётную степень, то получим уравнение, равносильное данному.

При возведении обеих частей уравнения в чётную степень полученное уравнение является следствием данного.

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ **равносильно системе**

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ **равносильно системе**

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Если для любого $x \in M$ **выполняются неравенства** $f(x) \geqslant 0$ **и** $g(x) \geqslant 0$, **то уравнения** $f(x) = g(x)$ **и** $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in N$, **равносильны на множестве** M.

Иррациональные неравенства

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ **равносильно системе**

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ **равносильно системе**

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ **равносильно совокупности двух систем**

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Глава 3. Тригонометрические функции

Изучив эту главу, вы расширите свои знания о тригонометрических функциях и их свойствах, узнаете, что такое радианная мера угла, какие функции называют периодическими.

Ознакомитесь с формулами, связывающими различные тригонометрические функции, научитесь применять эти формулы для выполнения вычислений, упрощения выражений, доказательства тождеств.

§ 14. Радианная мера угла

До сих пор для измерения углов вы использовали градусы или части градуса — минуты и секунды.

Во многих случаях удобно пользоваться другой единицей измерения углов. Её называют **радианом**.

Определение

Углом в один радиан называют центральный угол окружности, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

На рисунке 14.1 изображён центральный угол AOB, опирающийся на дугу AB, длина которой равна радиусу окружности. Величина угла AOB равна одному радиану. Пишут: $\angle AOB = 1$ рад. Также говорят, что радианная мера дуги AB равна одному радиану. Пишут: $\cup AB = 1$ рад.

Радианная мера угла (дуги) не зависит от радиуса окружности. Этот факт проиллюстрирован на рисунке 14.2.

Рис. 14.1

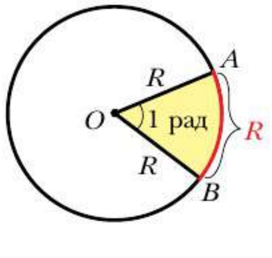


Рис. 14.2

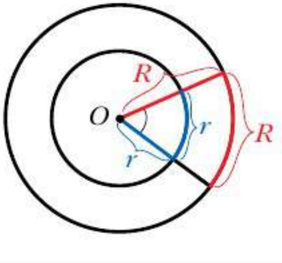
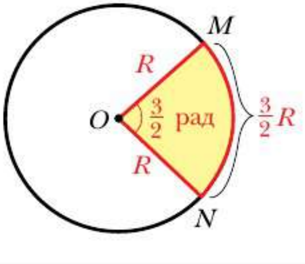


Рис. 14.3



На рисунке 14.3 изображены окружность радиуса R и дуга MN, длина которой равна $\frac{3}{2}R$. Тогда радианная мера угла MON (дуги MN) равна $\frac{3}{2}$ рад. Вообще, если центральный угол окружности радиуса R опирается на дугу, длина которой равна αR, то говорят, что **радианная мера** этого центрального угла равна α рад.

Длина полуокружности равна πR. Следовательно, радианная мера полуокружности равна π рад. Градусная мера полуокружности составляет $180°$. Сказанное позволяет установить связь между радианной и градусной мерами, а именно

$$\pi \text{ рад} = 180°. \qquad (1)$$

Отсюда

$$\boxed{\mathbf{1\ рад} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\pi}\right)^{\circ}}$$

Разделив 180 на 3,14 (напомним, что $\pi \approx 3{,}14$), можно установить: 1 рад $\approx 57°$.

Равенство (1) позволяет также записать, что

$$\boxed{\mathbf{1° = \frac{\neq}{180}\ рад}} \qquad (2)$$

Из этого равенства легко установить, что, например, $15° = 15 \cdot \frac{\pi}{180}$ рад $= \frac{\pi}{12}$ рад, $90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180}$ рад $= \frac{\pi}{2}$ рад, $135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180}$ рад $= \frac{3\pi}{4}$ рад.

Обычно при записи радианной меры угла обозначение «рад» опускают. Например, пишут $135° = \frac{3\pi}{4}$.

В таблице приведены градусные и радианные меры часто встречающихся углов.

Градусная мера угла	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
Радианная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Используя радианную меру угла, можно получить удобную формулу для вычисления длины дуги окружности.

Поскольку центральный угол в 1 рад опирается на дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α рад опирается на дугу, длина которой равна αR. Если длину дуги, содержащей α рад, обозначить l, то можно записать:

$$\boldsymbol{l = \alpha R}$$

На координатной плоскости рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Такую окружность называют **единичной**.

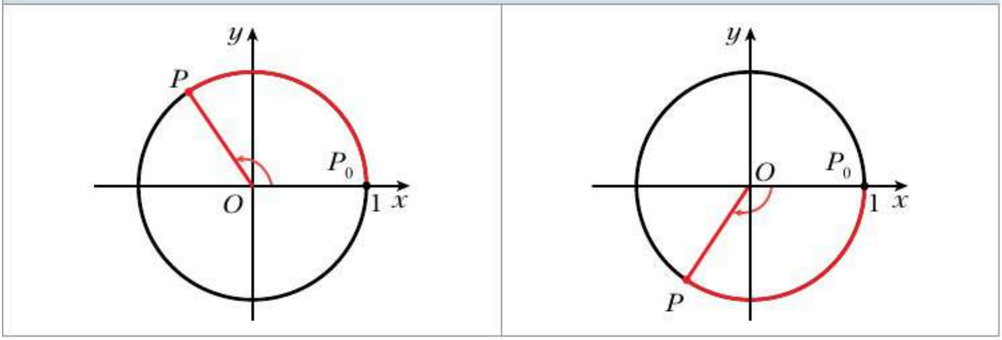
Пусть точка P, начиная движение от точки $P_0(1; 0)$, перемещается по единичной окружности против часовой стрелки. В некоторый момент времени она займёт положение, при котором $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (рис. 14.4).

Будем говорить, что **точка $\boldsymbol{P}$ получена в результате поворота точки $\boldsymbol{P_0}$ вокруг начала координат** на угол $\frac{2\pi}{3}$ (на угол 120°).

Пусть теперь точка P переместилась по единичной окружности по часовой стрелке и заняла положение, при котором $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (рис. 14.5). Будем говорить, что точка P получена в результате поворота точки P_0 вокруг начала координат на угол $-\frac{2\pi}{3}$ (на угол -120°).

Вообще, когда рассматривают движение точки по окружности против часовой стрелки (см. рис. 14.4), то угол поворота считают положительным, а по часовой стрелке (см. рис. 14.5) — отрицательным.

Рис. 14.4 **Рис. 14.5**



Рассмотрим ещё несколько примеров. Обратимся к рисунку 14.6. Можно сказать, что точка A получена в результате поворота точки P_0 вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{2}$ (на угол 90°) или на угол $-\frac{3\pi}{2}$ (на угол

Рис. 14.6

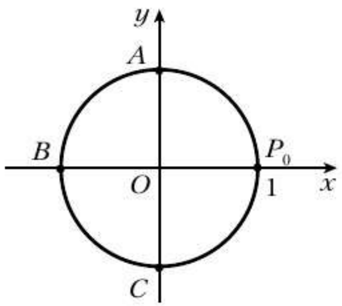
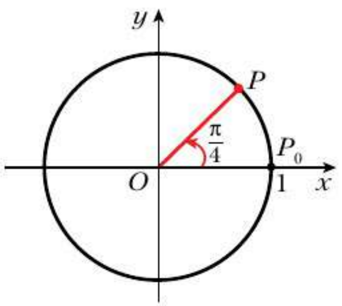


Рис. 14.7



$-270°$). Точка B получена в результате поворота точки P_0 на угол π (на угол $180°$) или на угол $-\pi$ (на угол $-180°$). Точка C получена в результате поворота точки P_0 на угол $\frac{3\pi}{2}$ (на угол $270°$) или на угол $-\frac{\pi}{2}$ (на угол $-90°$).

Если точка P, двигаясь по единичной окружности, сделает полный оборот, то можно говорить, что угол поворота равен 2π (то есть $360°$) или -2π (то есть $-360°$).

Если точка P сделает полтора оборота против часовой стрелки, то естественно считать, что угол поворота равен 3π (то есть $540°$), если по часовой стрелке – то -3π (то есть $-540°$).

Величина угла поворота как в радианах, так и в градусах может выражаться любым действительным числом.

Угол поворота однозначно определяет положение точки P на единичной окружности. Однако любому положению точки P на окружности соответствует бесконечно много углов поворота. Например, точке P (рис. 14.7) соответствуют такие углы поворота: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, $\frac{\pi}{4}+4\pi$, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ и т. д., а также $\frac{\pi}{4}-2\pi$, $\frac{\pi}{4}-4\pi$, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ и т. д. Отметим, что все эти углы можно получить с помощью формулы $\alpha=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

1. Что называют углом в один радиан?
2. Какова радианная мера угла, равного $1°$?
3. Чему равна длина дуги окружности радиуса R, содержащей α рад?
4. Каким числом может выражаться величина угла поворота?
5. Сколько точек определяет на единичной окружности угол поворота?
6. Сколько углов поворота соответствуют положению точки на единичной окружности?

Упражнения

14.1. Найдите радианную меру угла, равного:

1) $25°$; 2) $40°$; 3) $100°$; 4) $160°$; 5) $210°$; 6) $300°$.

14.2. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1{,}2\pi$; 5) 3π; 6) $2{,}5\pi$.

14.3. Заполните таблицу.

Градусная мера угла		$12°$	$36°$			$105°$	$225°$			$240°$
Радианная мера угла	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$			4π	$1{,}8\pi$	

14.4. Чему равна длина дуги окружности, радиус которой равен 12 см, если радианная мера дуги составляет:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 2π?

14.5. Вычислите длину дуги окружности, если известны её радианная мера α и радиус R окружности:

1) $\alpha = 3$, $R = 5$ см; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ см; 3) $\alpha = 0{,}4\pi$, $R = 2$ см.

14.6. Сравните величины углов, заданных в радианах:

1) $\frac{\pi}{2}$ и 1,5; 2) $-\frac{\pi}{2}$ и -2; 3) $\frac{3\pi}{2}$ и 4,8.

14.7. Сравните величины углов, заданных в радианах:

1) $\frac{\pi}{4}$ и 1; 2) $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{6}$.

14.8. Отметьте на единичной окружности точку, которую получим при повороте точки P_0 (1; 0) на угол:

1) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 5) $-120°$; 7) $-480°$;

2) $150°$; 4) $-45°$; 6) $450°$; 8) $-\frac{7\pi}{3}$.

14.9. Отметьте на единичной окружности точку, которую получим при повороте точки P_0 (1; 0) на угол:

1) $225°$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 5) $420°$; 7) $\frac{2\pi}{3}$; 9) 6π;

2) $-60°$; 4) $320°$; 6) $-315°$; 8) $-\frac{5\pi}{6}$; 10) $-720°$.

14.10. В какой четверти находится точка единичной окружности, полученная при повороте точки P_0 (1; 0) на угол:

1) $127°$; 4) $400°$; 7) $-400°$; 10) $-\frac{7\pi}{6}$; 13) 3;

2) $89°$; 5) $600°$; 8) $-470°$; 11) $-1{,}8\pi$; 14) 6;

3) $276°$; 6) $750°$; 9) $\frac{\pi}{5}$; 12) $2{,}4\pi$; 15) -2?

14.11. В какой четверти находится точка единичной окружности, полученная при повороте точки P_0 (1; 0) на угол:

1) $94°$; 4) $-100°$; 7) $-800°$; 10) $-\frac{7\pi}{3}$; 13) 1;

2) $176°$; 5) $-380°$; 8) $\frac{3\pi}{4}$; 11) $5{,}5\pi$; 14) -3;

3) $200°$; 6) $700°$; 9) $-\frac{3\pi}{4}$; 12) $-\frac{11\pi}{6}$; 15) 5?

14.12. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной при повороте точки P_0 (1; 0) на угол:

1) $\frac{\pi}{2}$; 3) $-90°$; 5) $\frac{5\pi}{2}$; 7) $450°$;

2) π; 4) $-180°$; 6) $-\frac{3\pi}{2}$; 8) -2π.

14.13. Какие координаты имеет точка единичной окружности, полученная при повороте точки P_0 (1; 0) на угол:

1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) $180°$; 5) $-540°$?

14.14. Запишите наименьший положительный и наибольший отрицательный углы, на которые надо повернуть точку P_0 (1; 0), чтобы получить точку с координатами:

1) (0; 1); 2) (−1; 0); 3) (0; −1); 4) (1; 0).

14.15. Среди углов $400°$, $510°$, $870°$, $1230°$, $-150°$, $-320°$, $-210°$, $-680°$, $-1040°$ укажите те, при повороте на которые точка P_0 (1; 0) займёт то же положение, что и при повороте на угол: 1) $40°$; 2) $150°$.

14.16. Найдите угол α, $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, при повороте на который точка P_0 (1; 0) займёт то же положение, что и при повороте на угол: 1) $440°$; 2) $-170°$; 3) $-315°$; 4) $1000°$.

14.17. Найдите все углы, на которые нужно повернуть точку P_0 (1; 0), чтобы получить точку:

1) P_1 (0; 1); 2) P_2 (−1; 0); 3) $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 4) $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

14.18. Найдите все углы, на которые нужно повернуть точку P_0 (1; 0), чтобы получить точку:

1) P_1 (0; –1); 2) $P_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

14.19. Найдите координаты точек единичной окружности, полученных при повороте точки P_0 (1; 0) на углы:

1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 5) $2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

2) $-\frac{\pi}{2} + 4\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

14.20. Найдите координаты точек единичной окружности, полученных при повороте точки P_0 (1; 0) на углы:

1) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\neq k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

14.21. Докажите, что площадь сектора, содержащего дугу в α рад, можно вычислить по формуле $S = \frac{\alpha R^2}{2}$, где R – радиус окружности.

Упражнения для повторения

14.22. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 6}{x - 3} = \frac{x}{x - 3}$; 2) $\frac{3x - 1}{x} - \frac{4}{x - 2} = \frac{10 - 9x}{x^2 - 2x}$.

14.23. В некотором городе проживает 88 200 жителей. Сколько жителей было в этом городе два года назад, если ежегодный прирост населения составлял 5 %?

§ 15. Тригонометрические функции числового аргумента

Понятия «синус», «косинус», «тангенс» и «котангенс» углов от 0° до 180° знакомы вам из курса геометрии 9 класса. Обобщим эти понятия для произвольного угла поворота α.

Вводя определения тригонометрических функций углов от 0° до 180°, мы пользовались единичной полуокружностью. Для произвольных углов поворота естественно обратиться к единичной окружности.

Рассмотрим единичную окружность (рис. 15.1).

Определение

Косинусом и синусом угла поворота α называют соответственно абсциссу x и ординату y точки P (x; y), которая

получена в результате поворота точки P_0 (1; 0) вокруг начала координат на угол α (см. рис. 15.1).

Пишут: $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.

Рис. 15.1

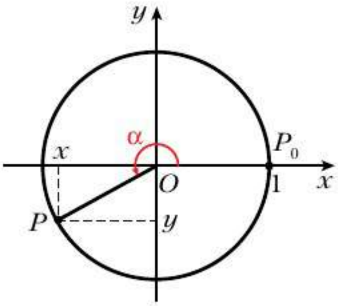
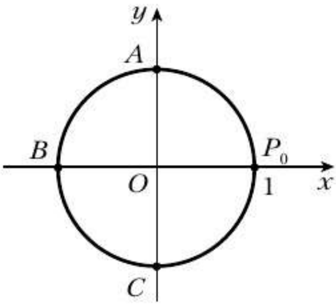


Рис. 15.2



Точки P_0, A, B и C (рис. 15.2) имеют соответственно такие координаты: (1; 0), (0; 1), (–1; 0), (0; –1). Эти точки получены в результате поворота точки P_0 (1; 0) соответственно на такие углы: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Поэтому, пользуясь данным определением, можно составить такую таблицу:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	–1
$\cos x$	1	0	–1	0

Пример 1. Найдите все углы поворота α, при которых: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = 0$.

Решение.

1) Ординату, равную нулю, имеют только две точки единичной окружности: P_0 и B (см. рис. 15.2). Эти точки получены в результате поворотов точки P_0 на такие углы:

$$0,\ 2\pi,\ -2\pi,\ 4\pi,\ -4\pi,\ \ldots \text{ и}$$
$$\pi,\ -\pi,\ 3\pi,\ -3\pi,\ \ldots .$$

Все эти углы можно получить с помощью формулы $\alpha = \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, $\sin\alpha = 0$ при $\alpha = \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Абсциссу, равную нулю, имеют только две точки единичной окружности: A и C (см. рис. 15.2). Эти точки получены в результате поворотов точки P_0 на такие углы:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+2\pi,\ \frac{\pi}{2}-2\pi,\ \frac{\pi}{2}+4\pi,\ \frac{\pi}{2}-4\pi,\ \ldots \text{ и}$$

$$\frac{\pi}{2}-\pi,\ \frac{\pi}{2}+\pi,\ \frac{\pi}{2}-3\pi,\ \frac{\pi}{2}+3\pi,\ \ldots .$$

Все эти углы можно получить с помощью формулы $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, $\cos\alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. ◄

Определение

Тангенсом угла поворота α называют отношение синуса этого угла к его косинусу:

$$\boxed{\mathbf{tg}\alpha = \frac{\mathbf{sin}\alpha}{\mathbf{cos}\alpha}}$$

Определение

Котангенсом угла поворота α называют отношение косинуса этого угла к его синусу:

$$\boxed{\mathbf{ctg}\alpha = \frac{\mathbf{cos}\alpha}{\mathbf{sin}\alpha}}$$

Например, $\operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = 0$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0.$

Из определения тангенса следует, что тангенс определён для тех углов поворота α, при которых $\cos\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Из определения котангенса следует, что котангенс определён для тех углов поворота α, при которых $\sin\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Вы знаете, что каждому углу поворота α соответствует *единственная* точка единичной окружности. Следовательно, каждому значению угла α соответствует единственное число, являющееся значением синуса $\Big($косинуса, тангенса для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, котангенса для $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}\Big)$ угла α. Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса, котангенса) от величины угла поворота является функциональной.

Функции $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $p(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, соответствующие этим функциональным зависимостям, называют **тригонометрическими функциями** угла поворота α.

Каждому действительному числу α поставим в соответствие угол в α рад. Это позволяет рассматривать тригонометрические функции числового аргумента.

Например, запись «$\sin 2$» означает «синус угла в 2 радиана».

Из определений синуса и косинуса следует, что областью определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество $\boldsymbol{R}$.

Так как абсциссы и ординаты точек единичной окружности принимают все значения от -1 до 1 включительно, то областью значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является промежуток $[-1; 1]$.

Углам поворота α и $\alpha + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, соответствует одна и та же точка единичной окружности. Поэтому

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi n),\ n \in Z}$$
$$\boldsymbol{\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n),\ n \in Z}$$

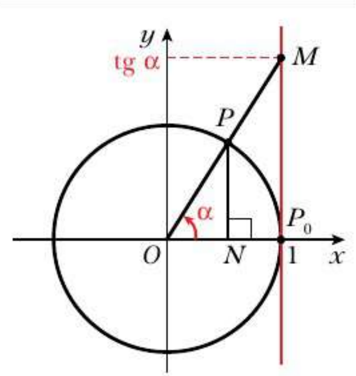
Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ состоит из всех действительных чисел, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Область определения функции $y = \operatorname{ctg} x$ состоит из всех действительных чисел, кроме чисел вида πk, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Чтобы найти области значений этих функций, обратимся к следующей геометрической интерпретации.

Проведём прямую $x = 1$. Она проходит через точку P_0 (1; 0) (рис. 15.3).

Рис. 15.3



Пусть точка P получена в результате поворота точки P_0 (1; 0) на угол α и расположена так, как показано на рисунке 15.3. Прямая OP пересекает прямую $x = 1$ в точке M. Проведём $PN \perp OP_0$.

Из подобия треугольников OPN и OMP_0 следует, что $\frac{PN}{ON} = \frac{MP_0}{OP_0}$.

Поскольку $PN = \sin\alpha$, $ON = \cos\alpha$, $OP_0 = 1$, то $MP_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Следовательно, ордината точки M равна $\operatorname{tg}\alpha$.

Также при любом другом положении точки P на единичной окружности выполняется следующее: если прямая OP пересекает прямую $x = 1$, то ордината точки пересечения равна $\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому прямую $x = 1$ называют **осью тангенсов**.

При изменении положения точки P на единичной окружности (рис. 15.4) точка M может занять любое положение на прямой $x = 1$, то есть ординатой точки M может быть любое число. Это означает, что областью значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$.

Пусть точка P получена в результате поворота точки P_0 (1; 0) на угол α и расположена так, как показано на рисунке 15.5. Если прямая OP пересекает прямую $y = 1$, то абсцисса точки пересечения равна $\operatorname{ctg}\alpha$. Поэтому прямую $y = 1$ называют **осью котангенсов**.

Рис. 15.4

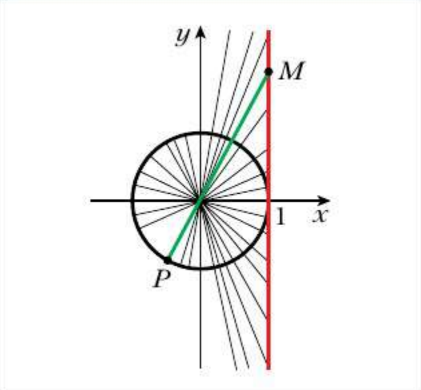
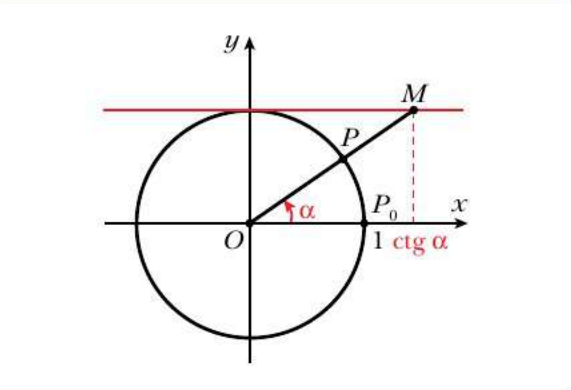


Рис. 15.5



Из рисунка 15.6 понятно, что областью значений функции $y = \operatorname{ctg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$.

Рис. 15.6

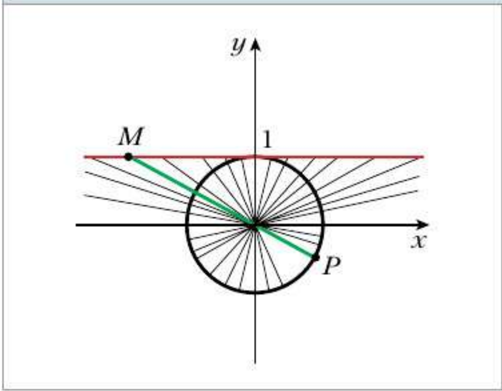


Рис. 15.7

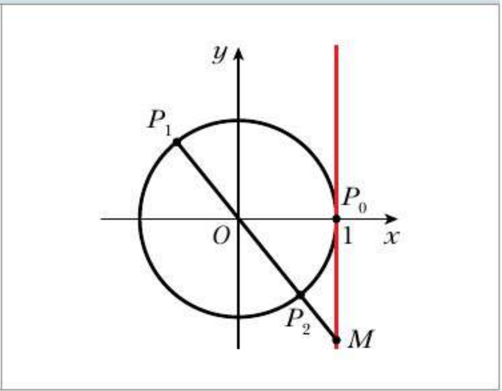
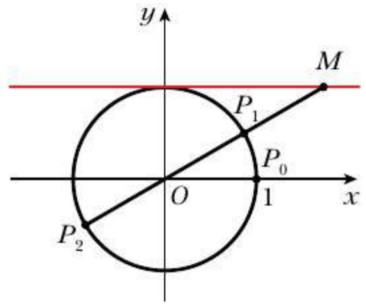
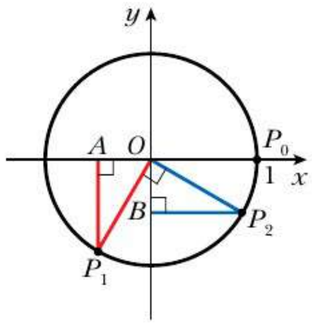


Рис. 15.8	Рис. 15.9
	

Если точки P_1, O и P_2 лежат на одной прямой, то прямые OP_1 и OP_2 пересекают ось тангенсов (котангенсов) в одной и той же точке M (рис. 15.7, 15.8). Это означает, что тангенсы (котангенсы) углов, отличающихся на π, 2π, 3π и т. д., равны. Отсюда

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \mathbf{tg}\,(\alpha + \pi \boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}$$
$$\mathbf{ctg}\,\alpha = \mathbf{ctg}\,(\alpha + \pi \boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}$$

Пример 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $1 - 4\cos\alpha$.

Решение. Поскольку $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4$. Отсюда $-3 \leqslant 1 - 4\cos\alpha \leqslant 5$. Следовательно, наименьшее значение данного выражения равно -3; выражение принимает его при $\cos\alpha = 1$. Наибольшее значение данного выражения равно 5; выражение принимает его при $\cos\alpha = -1$. ◄

Пример 3. Докажите, что $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Пусть точки P_1 и P_2 получены в результате поворотов точки P_0 на углы α и $\alpha + \frac{\pi}{2}$ соответственно. Опустим перпендикуляры P_1A и P_2B на оси x и y соответственно (рис. 15.9). Поскольку $\angle P_1OP_2 = \frac{\pi}{2}$, то можно установить (сделайте это самостоятельно), что $\Delta OP_1A = \Delta OP_2B$. Отсюда $OA = OB$. Следовательно, абсцисса точки P_1 равна ординате точки P_2, то есть $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Случаи расположения точек P_1 и P_2 в других координатных четвертях рассматриваются аналогично.

Рассмотрите самостоятельно случаи, когда точки P_1 и P_2 лежат на координатных осях. ◄

1. Что называют косинусом угла поворота? Синусом угла поворота? тангенсом угла поворота? Котангенсом угла поворота?
2. Поясните, что называют тригонометрическими функциями угла поворота; числового аргумента.
3. Какова область определения функции $y = \sin x$? $y = \cos x$?
4. Какова область значений функции $y = \sin x$? $y = \cos x$?
5. Чему равен $\sin(\alpha + 2\pi n)$, где $n \in \boldsymbol{Z}$? $\cos(\alpha + 2\pi n)$, где $n \in \boldsymbol{Z}$?
6. Какова область определения функции $y = \operatorname{tg} x$? $y = \operatorname{ctg} x$?
7. Какова область значений функции $y = \operatorname{tg} x$? $y = \operatorname{ctg} x$?
8. Чему равен $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$, где $n \in \boldsymbol{Z}$? $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n)$, где $n \in \boldsymbol{Z}$?

Упражнения

15.1. Вычислите значение выражения:

1) $2\cos 0° + 3\sin 90°$;
2) $4\operatorname{tg} 180° - 2\operatorname{ctg} 90°$;
3) $\sin^2 60° + \cos^2 30°$;
4) $\sin 45° \cos 60° \operatorname{ctg} 30°$;
5) $\sin 0 + \operatorname{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$;
6) $5\cos\pi + 4\cos\frac{3\pi}{2} + 2\cos 2\pi$;
7) $2\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}$;
8) $\sin\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

15.2. Чему равно значение выражения:

1) $\cos 60° + \sin 30°$;
2) $7\operatorname{tg}^2 45° - 3\operatorname{ctg} 45°$;
3) $\sin 180° \cos 120° \operatorname{tg} 60°$;
4) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;
5) $\cos\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$;
6) $6\cos 0 + 4\sin 2\pi + 4\sin^2\frac{2\pi}{3}$?

15.3. Известно, что $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Найдите и сравните значения выражений:

1) $\sin 2\alpha$ и $2\sin\alpha$;
2) $\cos 3\alpha$ и $3\cos\alpha$.

15.4. Известно, что $\beta = \frac{\pi}{4}$. Найдите и сравните значения выражений:

1) $\sin 4\beta$ и $4\sin\beta$;
2) $\operatorname{tg} 4\beta$ и $4\operatorname{tg}\beta$.

15.5. Возможно ли равенство:

1) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; 3) $\cos\alpha = \frac{\pi}{4}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha = -4$;

2) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$; 4) $\sin\alpha = \frac{9}{8}$; 6) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{26}$?

15.6. Может ли быть равным числу $\frac{\sqrt{5}}{2}$ значение:

1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$?

15.7. Укажите наибольшее и наименьшее значения выражения:
1) $3\sin\alpha$; 3) $2 - \sin\alpha$; 5) $\sin^2\alpha$;
2) $4 + \cos\alpha$; 4) $6 - 2\cos\alpha$; 6) $2\cos^2\alpha - 3$.

15.8. Укажите наибольшее и наименьшее значения выражения:
1) $-5\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha - 2$; 3) $5 + \sin^2\alpha$; 4) $7 - 3\sin\alpha$.

15.9. Укажите какие-нибудь три значения x, при которых выполняется равенство:
1) $\sin x = 1$; 2) $\sin x = -1$.

15.10. Укажите какие-нибудь три значения x, при которых выполняется равенство:
1) $\cos x = 1$; 2) $\cos x = -1$.

15.11. Найдите все значения x, при которых выполняется равенство:
1) $\sin x = 1$; 2) $\sin x = -1$.

15.12. Найдите все значения x, при которых выполняется равенство:
1) $\cos x = 1$; 2) $\cos x = -1$.

15.13. Существует ли такое значение $x \in \boldsymbol{R}$, при котором обе функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ не определены?

15.14. При каких значениях a возможно равенство:
1) $\cos x = a + 3$; 3) $\cos x = a^2 - 1$; 5) $\cos x = a^2 - 5a + 5$;
2) $\sin x = a^2 + 1$; 4) $\sin x = a^2 - a - 1$; 6) $\operatorname{tg} x = \frac{a+2}{a-2}$?

15.15. При каких значениях a возможно равенство:
1) $\sin x = a - 2$; 3) $\cos x = a^2 - 3$;
2) $\cos x = a^2 + 2$; 4) $\sin x = 2a - a^2 - 2$?

15.16. Сравните значения выражений $2\sin\alpha$ и $\sin^2\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

15.17. Сравните:
1) $\cos 10°$ и $\cos 10° \cos 20°$; 2) $\sin 40°$ и $\sin^2 40°$.

15.18. Найдите область значений выражения:

1) $\frac{1}{2 + \sin x}$; 2) $\frac{1}{1 - \cos x}$.

15.19. Найдите область значений функции:

1) $y = \frac{2}{3 - \cos x}$; 2) $y = \frac{1}{\sin x + 1}$.

15.20. Докажите, что $\sin\alpha = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

15.21. Докажите, что $\cos\alpha = -\cos(\pi + \alpha)$.

Готовимся к изучению новой темы

15.22. Сравните с нулём координаты точки A $(x; y)$, если эта точка лежит:
1) в I координатной четверти;
2) во II координатной четверти;
3) в III координатной четверти;
4) в IV координатной четверти.

15.23. Чётной или нечётной является функция:

1) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$; 3) $f(x) = 2x^7 + 4x^5 - 3x$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; 4) $f(x) = \sqrt[4]{|x|}$?

§ 16. Знаки значений тригонометрических функций. Чётность и нечётность тригонометрических функций

Пусть точка P получена в результате поворота точки P_0 (1; 0) вокруг начала координат на угол α. Если точка P принадлежит I координатной четверти, то говорят, что α **является углом I четверти**. Аналогично можно говорить об углах II, III и IV четвертей.

Например, $\frac{\pi}{7}$ и $-300°$ – углы I четверти, $\frac{2\pi}{3}$ и $-185°$ – углы II четверти, $\frac{5\pi}{4}$ и $-96°$ – углы III четверти, $355°$ и $-\frac{\pi}{8}$ – углы IV четверти.

Углы вида $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, не относят ни к какой четверти.

Точки, расположенные в I четверти, имеют положительные абсциссу и ординату. Следовательно, если α – угол I четверти, то $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$.

Если α – угол II четверти, то $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$.

Если α – угол III четверти, то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$.

Если α – угол IV четверти, то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$.

Знаки значений синуса и косинуса схематически показаны на рисунке 16.1.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то тангенсы и котангенсы углов I и III четвертей являются положительными, а углов II и IV четвертей — отрицательными (рис. 16.2).

Пусть точки P_1 и P_2 получены в результате поворота точки P_0 (1; 0) на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 16.3).

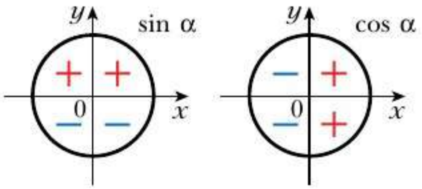


Рис. 16.1

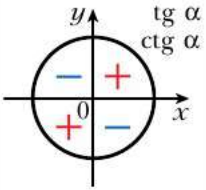


Рис. 16.2

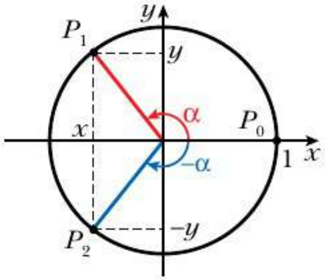


Рис. 16.3

Для любого α точки P_1 и P_2 имеют равные абсциссы и противоположные ординаты. Тогда из определений синуса и косинуса следует, что для любого действительного числа α

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos\alpha,\\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\end{aligned}}$$

Это означает, что ***функция косинус является чётной, а функция синус — нечётной***.

Области определения функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ симметричны относительно начала координат (проверьте это самостоятельно). Кроме того,

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Следовательно, ***функции тангенс и котангенс — нечётные***.

Пример 1. Какой знак имеет: 1) $\sin 280^\circ$; 2) $\operatorname{tg}(-140^\circ)$; 3) $\operatorname{ctg} 2$?

Решение. 1) Поскольку 280° является углом IV четверти, то $\sin 280^\circ < 0$.
2) Поскольку -140° является углом III четверти, то $\operatorname{tg}(-140^\circ) > 0$.

3) Поскольку $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, то 2 рад является углом II четверти. Следовательно, $\operatorname{ctg} 2 < 0$. ◄

Пример 2. Сравните $\sin 200^\circ$ и $\sin(-200^\circ)$.

Решение. Поскольку 200° – угол III четверти, -200° – угол II четверти, то $\sin 200^\circ < 0$, $\sin(-200^\circ) > 0$. Следовательно, $\sin 200^\circ < \sin(-200^\circ)$. ◄

Пример 3. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = \frac{1+\cos x}{x^2}$; 3) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$;

2) $f(x) = 1 + \sin x$; 4) $f(x) = \frac{\cos x}{x-1}$.

Решение.

1) Область определения данной функции, $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, симметрична относительно начала координат. Имеем:

$$f(-x) = \frac{1+\cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1+\cos x}{x^2} = f(x).$$

Следовательно, данная функция чётная.

2) Область определения данной функции, $D(f) = (-\infty; +\infty)$, симметрична относительно начала координат. Запишем:

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x.$$

Поскольку ни одно из равенств $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$ не выполняется для всех x из области определения, то данная функция не является ни чётной, ни нечётной.

3) Область определения данной функции – все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, – симметрична относительно начала координат. Имеем:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos^2(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} = -f(x).$$

Следовательно, данная функция нечётная.

4) Область определения данной функции, $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, не является симметричной относительно начала координат. Следовательно, данная функция не является ни чётной, ни нечётной. ◄

?

1. Когда говорят, что α является углом I четверти? II четверти? III четверти? IV четверти?

2. Какие знаки имеют синус, косинус, тангенс и котангенс в каждой из четвертей?

3. Какие из тригонометрических функций являются чётными, а какие — нечётными? Запишите соответствующие равенства.

Упражнения

16.1. Углом какой четверти является угол:

1) $38°$; 3) $217°$; 5) $-285°$; 7) $\frac{7\pi}{6}$; 9) $-\frac{2\pi}{3}$;

2) $196°$; 4) $-74°$; 6) $\frac{3\pi}{5}$; 8) $\frac{7\pi}{4}$; 10) $-\frac{16\pi}{9}$?

16.2. Положительным или отрицательным числом является значение тригонометрической функции:

1) $\sin 110°$; 4) $\sin(-280°)$; 7) $\cos 2$; 10) $\operatorname{tg} 1$;

2) $\cos 200°$; 5) $\operatorname{tg}(-75°)$; 8) $\sin(-3)$; 11) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$;

3) $\operatorname{tg} 160°$; 6) $\operatorname{ctg}(-230°)$; 9) $\operatorname{ctg} 1{,}7$; 12) $\cos\frac{2\pi}{3}$?

16.3. Какой знак имеет:

1) $\operatorname{tg} 104°$; 3) $\sin(-36°)$; 5) $\operatorname{ctg}(-291°)$; 7) $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$;

2) $\cos 220°$; 4) $\cos(-78°)$; 6) $\sin\frac{3\pi}{7}$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{19}{12}\pi\right)$?

16.4. Найдите значение выражения:

1) $\sin(-30°)$; 2) $\operatorname{tg}(-60°)$; 3) $\operatorname{ctg}(-45°)$; 4) $\cos(-30°)$.

16.5. Чему равно значение выражения:

1) $\cos(-60°) + \operatorname{tg}(-45°)$;

2) $\operatorname{ctg}(-60°)\sin(-45°)\cos(-45°)$?

16.6. Найдите значение выражения:

1) $\sin(-30°) - 2\operatorname{tg}(-45°) + \cos(-45°)$;

2) $5\operatorname{tg} 0 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos(-\pi) + 4\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

16.7. Найдите значение выражения:

1) $3\sin(-45°) + \cos(-45°) + 2\sin(-30°) + 6\cos(-60°)$;

2) $\sin^2(-60°) + \cos^2(-30°)$;

3) $2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

16.8. Известно, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Сравните с нулём значение выражения:

1) $\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$; 4) $\sin\alpha - \cos\alpha$.

16.9. Известно, что $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Сравните с нулём значение выражения:

1) $\sin\beta\cos\beta$; 2) $\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}$; 3) $\frac{\operatorname{tg}^3\beta}{\sin\beta}$; 4) $\sin\beta + \cos\beta$.

16.10. Сравните:

1) $\operatorname{tg} 130°$ и $\operatorname{tg}(-130°)$;
2) $\operatorname{tg} 110°$ и $\operatorname{tg} 193°$;
3) $\cos 80°$ и $\sin 330°$;
4) $\sin 60°$ и $\sin\frac{8\pi}{7}$;
5) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$ и $\cos 280°$;
6) $\operatorname{ctg} 6$ и $\operatorname{ctg} 6°$.

16.11. Сравните:

1) $\sin 200°$ и $\sin(-250°)$;
2) $\operatorname{ctg} 100°$ и $\operatorname{ctg} 80°$;
3) $\cos 250°$ и $\cos 290°$;
4) $\cos 6{,}2$ и $\sin 5$.

16.12. Известно, что α – угол III четверти. Упростите выражение:

1) $\sin\alpha - |\sin\alpha|$; 2) $|\cos\alpha| - \cos\alpha$; 3) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha$.

16.13. Известно, что β – угол IV четверти. Упростите выражение:

1) $|\sin\beta| + \sin\beta$; 2) $\cos\beta - |\cos\beta|$; 3) $|\operatorname{ctg}\beta| - \operatorname{ctg}\beta$.

16.14. Углом какой четверти является угол α, если:

1) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$;
2) $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$;
3) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$ и $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha + |\operatorname{ctg}\alpha| = 0$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$?

16.15. Углом какой четверти является угол α, если:

1) $\cos\alpha > 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$;
2) $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$;
3) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ и $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
4) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha = 0$ и $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$?

16.16. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;
2) $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$;
3) $f(x) = x^3 + \cos x$;
4) $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$;
5) $f(x) = \frac{(x-1)\cos x}{x-1}$;
6) $f(x) = \frac{x^3\sin x}{x}$.

16.17. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
2) $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$;
3) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2-1}$;
4) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3-1}$;
5) $f(x) = \cos x + \frac{\pi}{3}$;
6) $f(x) = \frac{(x^2-1)\operatorname{ctg} x}{x^2-1}$.

Упражнения для повторения

16.18. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2 - 36} = \sqrt{2x - 1}$; 2) $\sqrt{15 - 3x} - 1 = x$.

16.19. Найдите множество решений неравенства:

1) $\dfrac{x^2 - 2x}{x + 2} \leqslant 3$; 3) $(x + 1)(x - 2)(x + 3)^2 > 0$;

2) $\dfrac{x^2 + 3x}{x - 3} \geqslant -2$; 4) $(x + 2)(x - 1)(x - 3)^2 \leqslant 0$.

§ 17. Периодические функции

Многие процессы и события, происходящие в окружающем мире, повторяются через равные промежутки времени. Например, через 27,3 суток повторяется значение расстояния от Земли до Луны; если сегодня суббота, то через 7 дней снова настанет суббота. Подобные явления и процессы называют **периодическими**.

Вы знаете, что для любого числа x выполняются равенства

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Это значит, что значения функций синус и косинус периодически повторяются при изменении аргумента на 2π. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются примерами **периодических функций**.

Определение

Функцию f называют периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции f выполняются равенства

$$\boldsymbol{f(x - T) = f(x) = f(x + T).}$$

Число T называют периодом функции f.

Выполнение равенств $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ для любого x из области определения означает, что область определения периодической функции f обладает следующим свойством: если $x_0 \in D(f)$, то $(x_0 - T) \in D(f)$ и $(x_0 + T) \in D(f)$.

Вы знаете, что для любого x из области определения функции $y = \operatorname{tg} x$ выполняются равенства

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

Также для любого x из области определения функции $y = \operatorname{ctg} x$ выполняются равенства

$$\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi).$$

Тогда из определения периодической функции следует, что тангенс и котангенс являются периодическими функциями с периодом π.

Если функция f имеет период T, то любое число вида nT, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$, также является её периодом.

Докажем это свойство, например, для $n = 3$.

Имеем: $f(x - 3T) = f((x - 2T) - T) = f(x - 2T) = f((x - T) - T) = f(x - T) = f(x)$;

$f(x + 3T) = f((x + 2T) + T) = f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x)$.

Из этого свойства следует, что каждая периодическая функция имеет бесконечно много периодов.

Например, любое число вида $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$, является периодом функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$; любое число вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$, является периодом функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

Если среди всех периодов функции f существует наименьший положительный период, то его называют **главным периодом** функции f.

Теорема 17.1

Главным периодом функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является число 2π; главным периодом функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ является число π.

Доказательство

Проведём доказательство для функции $y = \sin x$ (остальные утверждения теоремы доказывают аналогично).

Если число T является периодом функции $y = \sin x$, то равенство $\sin(x + T) = \sin x$ выполняется при любом действительном значении x, в частности при $x = -\frac{T}{2}$. Тогда получаем:

$$\sin\left(-\frac{T}{2} + T\right) = \sin\left(-\frac{T}{2}\right).$$

Отсюда

$$\sin\frac{T}{2} = -\sin\frac{T}{2};$$

$$\sin\frac{T}{2} = 0.$$

Имеем: $\frac{T}{2} = \pi k$, $T = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Из последнего равенства следует, что любой период функции $y = \sin x$ имеет вид $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Наименьшим положительным числом вида $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, является число 2π, которое является периодом функции $y = \sin x$.

Следовательно, число 2π – главный период функции $y = \sin x$. ◄

Отметим, что не любая периодическая функция имеет главный период. Например, функция $y = c$, где c – некоторое число, является периодической. Очевидно, что любое действительное число, отличное от нуля, является её периодом. Следовательно, эта функция не имеет главного периода.

Пример 1. Найдите значение выражения: 1) $\sin 660^\circ$; 2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; 3) $\operatorname{tg} 135^\circ$.

Решение. 1) $\sin 660^\circ = \sin(720^\circ - 60^\circ) = \sin(-60^\circ + 360^\circ \cdot 2) = \sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin\frac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(-45^\circ + 180^\circ) = \operatorname{tg}(-45^\circ) = -1$. ◄

Пример 2. Докажите, что число $T = 5\pi$ является периодом функции $f(x) = \sin 4x$.

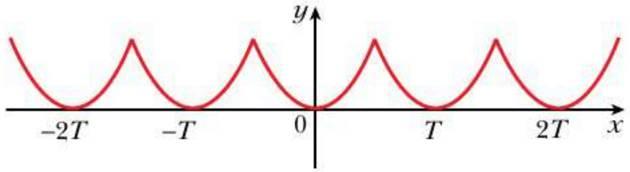
Решение. Имеем: $f(x + T) = \sin 4(x + 5\pi) = \sin(4x + 20\pi) = \sin 4x = f(x)$;

$$f(x - T) = \sin 4(x - 5\pi) = \sin(4x - 20\pi) = \sin 4x = f(x).$$

Следовательно, $f(x - 5\pi) = f(x) = f(x + 5\pi)$ для всех $x \in D(f)$, то есть число 5π является периодом функции f. ◄

На рисунке 17.1 изображён график некоторой периодической функции f с периодом T, $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Рис. 17.1



Фрагменты графика этой функции на промежутках $[0; T]$, $[T; 2T]$, $[2T; 3T]$ и т. д., а также на промежутках $[-T; 0]$, $[-2T; -T]$, $[-3T; -2T]$ и т. д. являются равными фигурами, причём любая из этих фигур может быть получена из любой другой параллельным переносом на вектор с координатами $(nT; 0)$, где n — некоторое целое число.

Пример 3. На рисунке 17.2 изображён фрагмент графика периодической функции, период которой равен T. Постройте график этой функции на промежутке $\left[-\frac{3T}{2}; \frac{5T}{2}\right]$.

Рис. 17.2

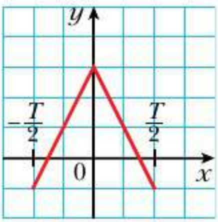
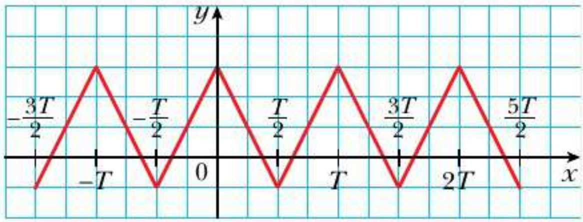


Рис. 17.3



Решение. Построим образы изображённой фигуры при параллельных переносах на векторы с координатами $(T; 0)$, $(2T; 0)$ и $(-T; 0)$. Объединение данной фигуры и полученных образов — искомый график (рис. 17.3). ◄

1. Какую функцию называют периодической?
2. Что такое период функции?
3. Какое число называют главным периодом функции?
4. Какое число является главным периодом функции $y = \sin x$? $y = \cos x$? $y = \operatorname{tg} x$? $y = \operatorname{ctg} x$?

Упражнения

17.1. Найдите значение выражения:

1) $\sin 390°$;
2) $\cos 420°$;
3) $\operatorname{tg} 780°$;
4) $\operatorname{ctg} 405°$;
5) $\cos(-750°)$;
6) $\sin(-390°)$;
7) $\operatorname{tg}(-210°)$;
8) $\operatorname{ctg} 225°$;
9) $\cos 300°$;
10) $\operatorname{tg} 150°$;
11) $\cos \frac{11\pi}{6}$;
12) $\sin \frac{5\pi}{3}$.

17.2. Найдите значение выражения:

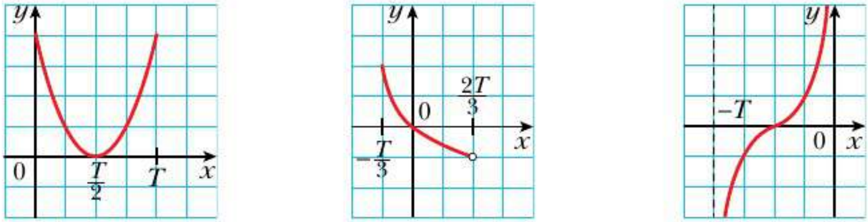
1) $\sin 420°$; 4) $\sin 1\,110°$; 7) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$;

2) $\cos 405°$; 5) $\operatorname{tg} 765°$; 8) $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$;

3) $\operatorname{tg}(-315°)$; 6) $\cos\frac{7\pi}{3}$; 9) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$.

17.3. На рисунке 17.4 изображена часть графика периодической функции, период которой равен T. Постройте график этой функции на промежутке $[-2T; 3T]$.

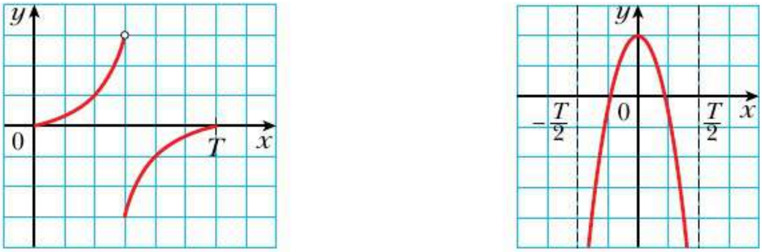
Рис. 17.4



а б в

17.4. На рисунке 17.5 изображена часть графика периодической функции, период которой равен T. Постройте график этой функции на промежутке $[-2T; 2T]$.

Рис. 17.5



а б

17.5. Докажите, что число T является периодом функции f:

1) $f(x) = \cos\frac{x}{4}$, $T = 8\pi$;

2) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$, $T = -\frac{2\pi}{3}$;

3) $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$, $T = 3$;

4) $f(x) = \sin(5x - 2)$, $T = \frac{4\pi}{5}$.

17.6. Докажите, что числа $\frac{2\pi}{3}$ и -4π являются периодами функции $f(x) = \cos 3x$.

17.7. Докажите, что число π не является периодом функции $f(x) = \sin x$.

17.8. Докажите, что число $-\frac{\pi}{2}$ не является периодом функции $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Упражнения для повторения

17.9. Найдите область значений функции:

1) $f(x) = x^2 + 2$;

2) $f(x) = x^2 + 2x$;

3) $f(x) = 2\sqrt{x+3}$;

4) $f(x) = 4 - 3\sqrt{x}$.

17.10. Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[6]{7}$;

2) $\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}} \cdot \sqrt[5]{27}$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{2}}}$.

§ 18. Свойства и графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Периодичность тригонометрических функций позволяет исследовать их свойства и строить графики по следующей схеме.

1) Рассмотреть промежуток вида $[a; a + T]$, то есть произвольный промежуток длиной в период T $\left(\text{чаще всего выбирают промежуток } [0; T]\right.$ или промежуток $\left.\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]\right)$.

2) Исследовать свойства функции на выбранном промежутке.

3) Построить график функции на этом промежутке.

4) Выполнить параллельный перенос полученной фигуры на векторы с координатами $(nT; 0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$, то есть на промежутке длиной в период этой функции.

При повороте точки P_0 $(1; 0)$ вокруг начала координат на углы от 0 до $\frac{\pi}{2}$ большему углу поворота соответствует точка единичной окружности с большей ординатой (рис. 18.1). Это означает, что функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

При повороте точки P_0 (1; 0) на углы от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ большему углу поворота соответствует точка единичной окружности с меньшей ординатой (см. рис. 18.1). Следовательно, функция $y = \sin x$ убывает на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

При повороте точки P_0 (1; 0) на углы от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π большему углу поворота соответствует точка единичной окружности с большей ординатой (см. рис. 18.1). Следовательно, функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Функция $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ имеет три нуля: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Если $x \in (0; \pi)$, то $\sin x > 0$; если $x \in (\pi; 2\pi)$, то $\sin x < 0$.

Функция $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ достигает своего наибольшего значения, равного 1, при $x = \frac{\pi}{2}$ и наименьшего значения, равного -1, при $x = \frac{3\pi}{2}$.

Функция $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ принимает все значения из промежутка $[-1; 1]$.

Полученные свойства функции $y = \sin x$ позволяют построить её график на промежутке $[0; 2\pi]$ (рис. 18.2). График можно построить точнее, если воспользоваться данными таблицы значений тригонометрических функций некоторых углов, приведённой на форзаце.

Рис. 18.1

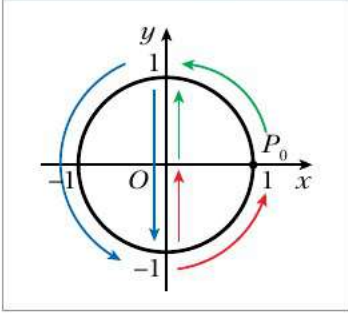
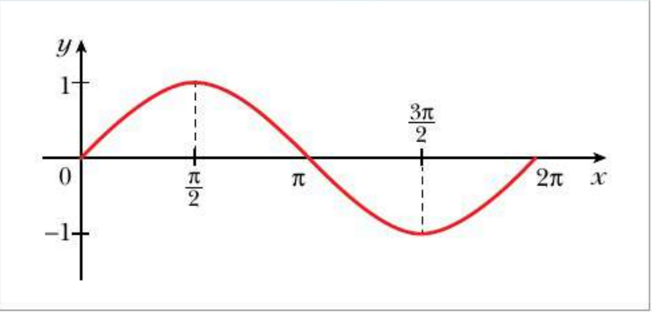


Рис. 18.2



На всей области определения график функции $y = \sin x$ можно получить из построенного графика с помощью параллельных переносов на векторы с координатами $(2\pi n; 0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 18.3).

Рис. 18.3

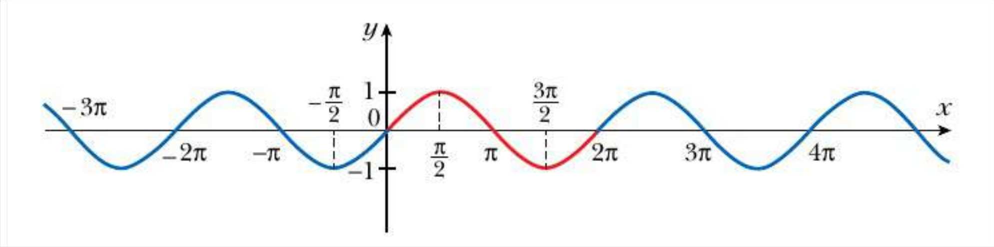


График функции $y = \sin x$ называют **синусоидой**.

В таблице приведены основные свойства функции $y = \sin x$.

Область определения	$\boldsymbol{R}$
Область значений	$[-1; 1]$
Периодичность	Периодическая с главным периодом, равным 2π
Нули функции	Числа вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$
Промежутки знакопостоянства	$\sin x > 0$ на каждом из промежутков вида $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $\sin x < 0$ на каждом из промежутков вида $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Чётность	Нечётная
Возрастание/ убывание	Возрастает на каждом из промежутков вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, убывает на каждом из промежутков вида $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Наибольшее и наименьшее значения	Наибольшее значение, равное 1, принимает в точках вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, наименьшее значение, равное -1, принимает в точках вида $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Рассматривая повороты точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на углы от 0 до 2π, можно прийти к такому выводу: функция $y = \cos x$ убывает на промежутке $[0; \pi]$ и возрастает на промежутке $[\pi; 2\pi]$.

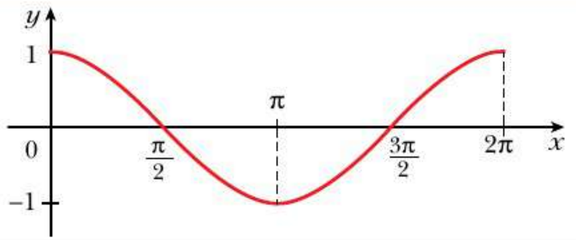
Функция $y = \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ имеет два нуля: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$. Если $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, то $\cos x > 0$; если $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\cos x < 0$.

Функция $y = \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ достигает своего наибольшего значения, равного 1, при $x = 0$ и при $x = 2\pi$, а своего наименьшего значения, равного -1, при $x = \pi$.

Функция $y = \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ принимает все значения из промежутка $[-1; 1]$.

График функции $y = \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ изображён на рисунке 18.4.

Рис. 18.4



На всей области определения график функции $y = \cos x$ можно получить из построенного графика с помощью параллельных переносов на векторы с координатами $(2\pi n; 0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 18.5).

Рис. 18.5

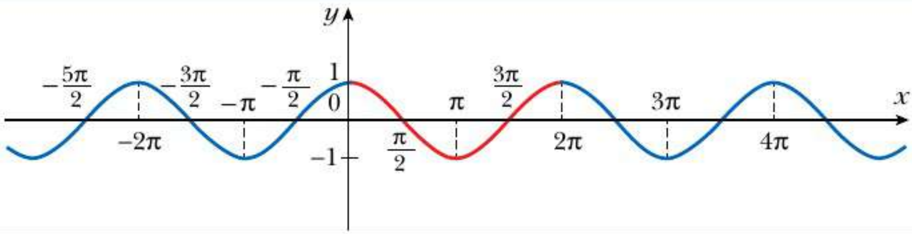
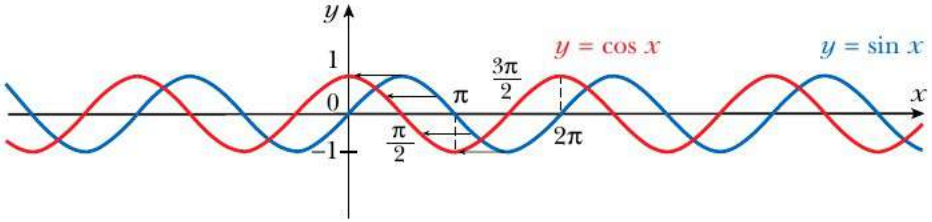


График функции $y = \cos x$ называют **косинусоидой**.

Если воспользоваться формулой $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (см. пример 3 § 15), то становится понятным, что график функции $y = \cos x$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = \sin x$ на вектор с координатами $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (рис. 18.6). Это означает, что графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ — равные фигуры.

Рис. 18.6



В таблице приведены основные свойства функции $y = \cos x$.

Область определения	$\boldsymbol{R}$
Область значений	$[-1; 1]$
Периодичность	Периодическая с главным периодом, равным 2π
Нули функции	Числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Промежутки знакопостоянства	$\cos x > 0$ на каждом из промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $\cos x < 0$ на каждом из промежутков вида $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Чётность	Чётная
Возрастание/убывание	Возрастает на каждом из промежутков вида $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$, убывает на каждом из промежутков вида $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Наибольшее и наименьшее значения	Наибольшее значение, равное 1, принимает в точках вида $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, наименьшее значение, равное -1, принимает в точках вида $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

Пример 1. Сравните: 1) $\sin 0{,}7\pi$ и $\sin 0{,}71\pi$; 2) $\cos 324°$ и $\cos 340°$.

Решение. 1) Поскольку числа $0{,}7\pi$ и $0{,}71\pi$ принадлежат промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, на котором функция $y = \sin x$ убывает, и $0{,}7\pi < 0{,}71\pi$, то $\sin 0{,}7\pi >$ $> \sin 0{,}71\pi$.

2) Поскольку $324°$ и $340°$ принадлежат промежутку $[180°; 360°]$, на котором функция $y = \cos x$ возрастает, и $324° < 340°$, то $\cos 324° < \cos 340°$. ◄

Пример 2. Сравните $\sin 40°$ и $\cos 40°$.

Решение. Поскольку $\sin 40° < \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\cos 40° > \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos 40° > \sin 40°$. ◄

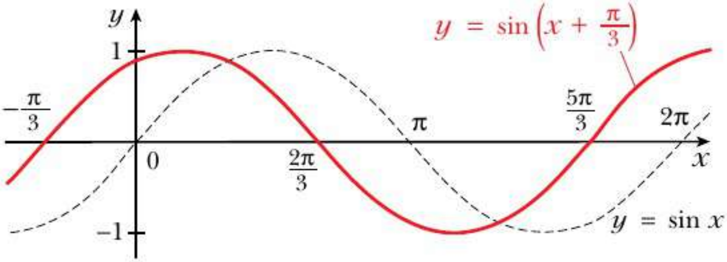
Пример 3. Возможно ли равенство $\sin \alpha = 2\sin 31°$?

Решение. Поскольку $\sin 31° > \sin 30° = \frac{1}{2}$, то $2\sin 31° > 1$. Следовательно, данное равенство невозможно. ◄

Пример 4. Постройте график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. Искомый график получаем из графика функции $y = \sin x$ в результате его параллельного переноса влево на $\frac{\pi}{3}$ единиц (рис. 18.7). ◄

Рис. 18.7



Пример 5. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Решение. Сожмём график функции $y = \sin x$ к оси ординат в 2 раза, то есть уменьшим в 2 раза расстояние от каждой точки графика функции $y = \sin x$ до оси ординат. Получим график функции $y = \sin 2x$. Потом этот

Рис. 18.8

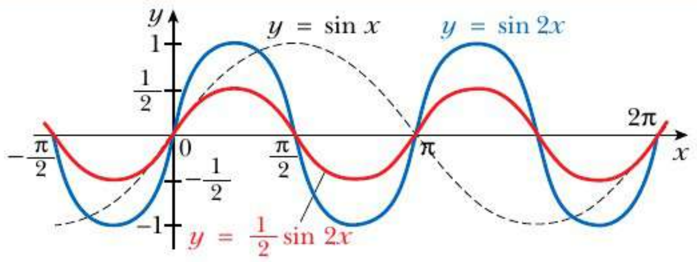
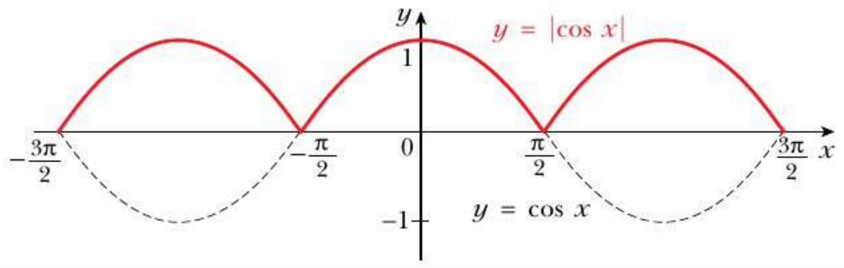


график сожмём в 2 раза к оси абсцисс. Получим искомый график (рис. 18.8). ◄

Пример 6. Постройте график функции $y = |\cos x|$.

Решение. Имеем: $|\cos x| = \cos x$, если $\cos x \geqslant 0$, и $|\cos x| = -\cos x$, если $\cos x < 0$. Тогда построение можно выполнить так: часть графика функции $y = \cos x$, лежащую в полуплоскости $y < 0$, симметрично отобразим относительно оси абсцисс, а часть графика функции $y = \cos x$, лежащую в полуплоскости $y \geqslant 0$, оставим без изменения. Искомый график – это объединение этих двух частей (рис. 18.9). ◄

Рис. 18.9



1. Перечислите основные свойства функции $y = \sin x$.

2. Перечислите основные свойства функции $y = \cos x$.

Упражнения

18.1. Принадлежит ли графику функции $y = \cos x$ точка:

1) $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B\left(\frac{9\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $C\ (-4\pi; -1)$?

18.2. Проходит ли график функции $y = \sin x$ через точку:

1) $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B\ (\pi; -1)$; 3) $C\left(\frac{23\pi}{6}; -\frac{1}{2}\right)$?

18.3. Среди чисел -2π, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{9\pi}{2}$, 7π укажите:

1) нули функции $y = \sin x$;

2) значения аргумента, при которых функция $y = \sin x$ принимает наибольшее значение;

3) значения аргумента, при которых функция $y = \sin x$ принимает наименьшее значение.

18.4. Среди чисел $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, 5π, 8π укажите:

1) нули функции $y = \cos x$;

2) значения аргумента, при которых функция $y = \cos x$ принимает наибольшее значение;

3) значения аргумента, при которых функция $y = \cos x$ принимает наименьшее значение.

18.5. На каких из указанных промежутков функция $y = \sin x$ возрастает:

1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$?

18.6. На каких из указанных промежутков функция $y = \sin x$ убывает:

1) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $[-\pi; 0]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$?

18.7. Какие из данных промежутков являются промежутками убывания функции $y = \cos x$:

1) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[6\pi; 7\pi]$?

18.8. Какие из данных промежутков являются промежутками возрастания функции $y = \cos x$:

1) $[-3\pi; -2\pi]$; 2) $[0; \pi]$; 3) $[-\pi; \pi]$; 4) $[3\pi; 4\pi]$?

18.9. Сравните:

1) $\sin 20°$ и $\sin 21°$; 3) $\sin \frac{10\pi}{9}$ и $\sin \frac{25\pi}{18}$; 5) $\cos 5{,}1$ и $\cos 5$;

2) $\cos 20°$ и $\cos 21°$; 4) $\cos \frac{10\pi}{9}$ и $\cos \frac{25\pi}{18}$; 6) $\sin 2$ и $\sin 2{,}1$.

18.10. Сравните:

1) $\cos \frac{\pi}{9}$ и $\cos \frac{4\pi}{9}$; 3) $\sin\left(-\frac{7\pi}{30}\right)$ и $\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$;

2) $\sin \frac{5\pi}{9}$ и $\sin \frac{17\pi}{18}$; 4) $\cos \frac{10\pi}{7}$ и $\cos \frac{11\pi}{9}$.

18.11. Сравните:

1) $\sin 58^\circ$ и $\cos 58^\circ$; 2) $\sin 18^\circ$ и $\cos 18^\circ$; 3) $\cos 80^\circ$ и $\sin 70^\circ$.

18.12. Возможно ли равенство:

1) $\cos\alpha = 2\sin 25^\circ$; 2) $\sin\alpha = \sqrt{2}\cos 35^\circ$?

18.13. Постройте график функции:

1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

18.14. Постройте график функции:

1) $y = -3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$.

18.15. Постройте график функции:

1) $y = \left(\sqrt{\sin x}\right)^2$; 3) $y = \cos x + \sqrt{\cos^2 x}$; 5) $y = \sqrt{\cos x - 1}$;

2) $y = \sin x + \sin|x|$; 4) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$; 6) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$.

18.16. Постройте график функции:

1) $y = \left(\sqrt{\cos x}\right)^2$; 3) $y = \sqrt{-\cos^2 x}$; 5) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$.

2) $y = \sin x - \sqrt{\sin^2 x}$; 4) $y = \sqrt{\sin x - 1}$;

18.17. Постройте график функции; укажите область значений данной функции, её нули, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и промежутки убывания; определите, какие наибольшее и наименьшее значения может принимать функция и при каких значениях аргумента:

1) $y = \sin x + 1$; 3) $y = \sin 2x$;

2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = -\frac{1}{2}\sin x$.

18.18. Постройте график функции; укажите область значений данной функции, её нули, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и промежутки убывания; определите, какие наибольшее и наименьшее значения может принимать функция и при каких значениях аргумента:

1) $y = \cos x - 1$; 3) $y = \cos\frac{x}{2}$;

2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = 3\cos x$.

18.19. Постройте график функции $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

18.20. Постройте график функции $y = -3\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 2$.

Упражнения для повторения

18.21. Найдите нули функции:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$;

2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$;

3) $f(x) = x\sqrt{x - 1}$;

4) $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$.

18.22. Вычислите значение выражения:

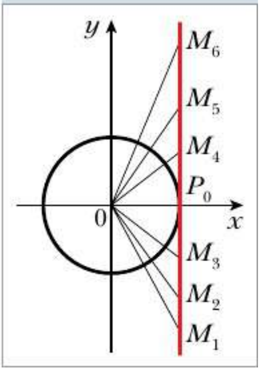
1) $\left(\dfrac{5^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{1}{4}} \cdot 10}\right)^4$;

2) $\left(\dfrac{7^{\frac{9}{4}} \cdot 3^{\frac{7}{4}}}{3^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

§ 19. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то есть на промежутке длиной в период этой функции $\left(\text{напомним, что функция } y = \operatorname{tg} x \text{ в точках } -\frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{\pi}{2} \text{ не определена}\right)$.

Рис. 19.1



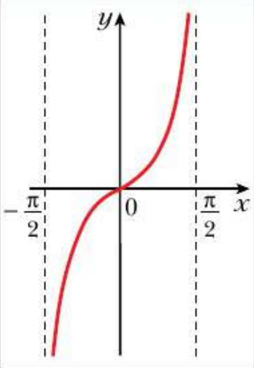
Из рисунка 19.1 видно, что при изменении угла поворота от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ значения тангенса увеличиваются. Это означает, что функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Также из рисунка 19.1 видно, что функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ принимает все значения из промежутка $(-\infty; +\infty)$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеет один нуль: $x = 0$.

Если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\operatorname{tg} x < 0$; если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg} x > 0$.

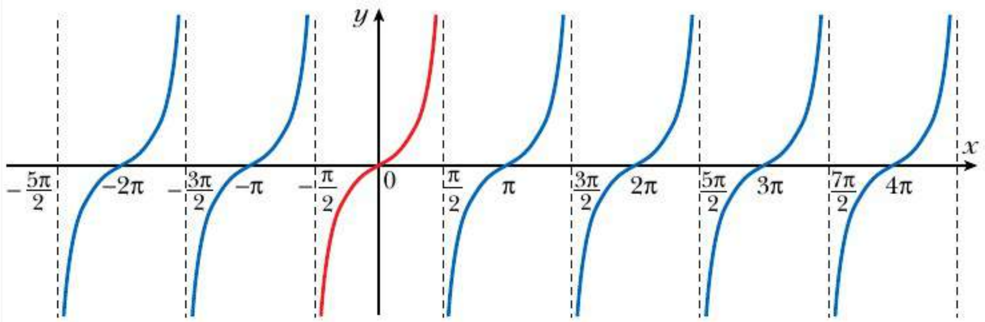
Рис. 19.2



Полученные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ позволяют построить её график на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 19.2). График можно построить точнее, если воспользоваться данными таблицы значений тригонометрических функций некоторых углов, приведённой на форзаце.

На всей области определения график функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить из построенного графика с помощью параллельных переносов на векторы с координатами $(\pi n; 0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 19.3).

Рис. 19.3



В таблице приведены основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

Область определения	Все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Область значений	$\boldsymbol{R}$
Периодичность	Периодическая с главным периодом, равным π
Нули функции	Числа вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$
Промежутки знакопостоянства	$\operatorname{tg} x > 0$ на каждом из промежутков вида $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $\operatorname{tg} x < 0$ на каждом из промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Чётность	Нечётная

Возрастание/ убывание	Возрастает на каждом из промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Наибольшее и наименьшее значения	Наибольшего и наименьшего значений не принимает

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$, то есть на промежутке длиной в период (напомним, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ не определена в точках 0 и π).

Из рисунка 19.4 видно, что при изменении угла поворота от 0 до π значения котангенса уменьшаются. Это означает, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутке $(0; \pi)$.

Также из рисунка 19.4 видно, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ принимает все значения из промежутка $(-\infty; +\infty)$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ имеет один нуль: $x = \frac{\pi}{2}$.

Если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{ctg} x > 0$; если $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\operatorname{ctg} x < 0$.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ изображён на рисунке 19.5.

Рис. 19.4

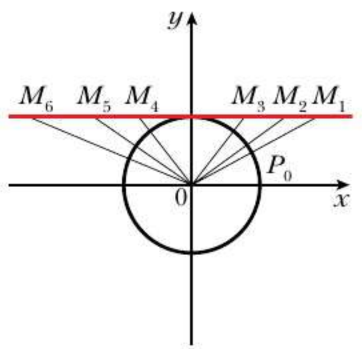
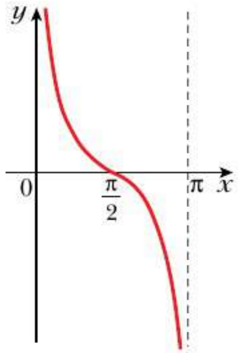
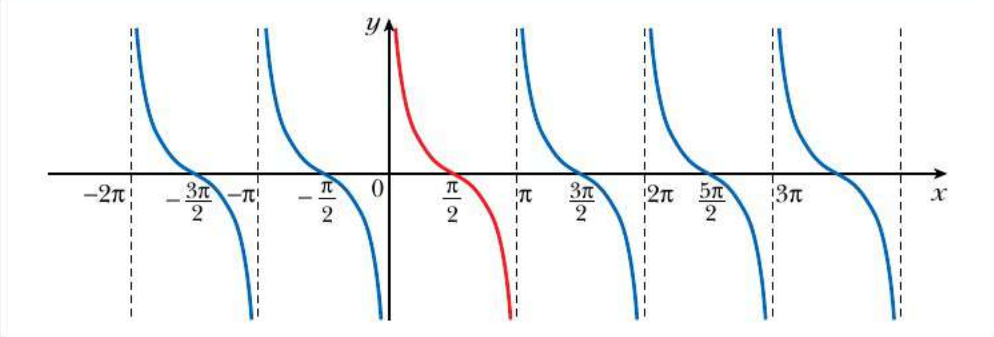


Рис. 19.5



На всей области определения график функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить из построенного графика с помощью параллельных переносов на векторы с координатами $(\pi n; 0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 19.6).

Рис. 19.6



В таблице приведены основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Область определения	Все действительные числа, кроме чисел вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$
Область значений	$\boldsymbol{R}$
Периодичность	Периодическая с главным периодом, равным π
Нули функции	Числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Промежутки знакопостоянства	$\operatorname{ctg} x > 0$ на каждом из промежутков вида $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $\operatorname{ctg} x < 0$ на каждом из промежутков вида $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Чётность	Нечётная
Возрастание/убывание	Убывает на каждом из промежутков вида $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Наибольшее и наименьшее значения	Наибольшего и наименьшего значений не принимает

Пример. Постройте график функции $y = \frac{|\operatorname{ctg} x|}{\operatorname{ctg} x}$.

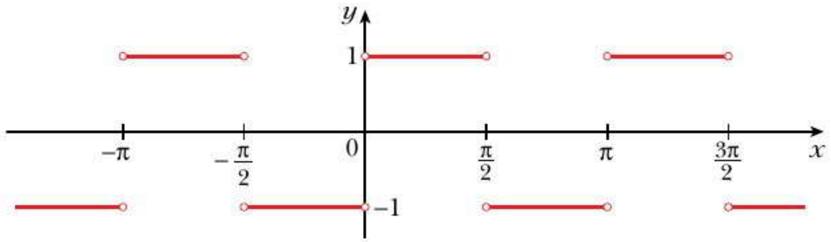
Решение. Областью определения данной функции являются все действительные числа, при которых $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$, то есть все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$ и πk, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Если $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $\operatorname{ctg} x > 0$. Отсюда $y = 1$.

Если $\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $\operatorname{ctg} x < 0$. Отсюда $y = -1$.

Искомый график состоит из отдельных отрезков с «выколотыми» концами (рис. 19.7). ◄

Рис. 19.7



1. Перечислите основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.
2. Перечислите основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Упражнения

19.1. Проходит ли график функции $y = \operatorname{tg} x$ через точку:

1) $A\left(-\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 2) $B\left(-\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right)$; 3) $C\ (\pi; 0)$?

19.2. Проходит ли график функции $y = \operatorname{ctg} x$ через точку:

1) $A\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 2) $B\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$; 3) $C\left(\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$?

19.3. Какие из чисел $\frac{\pi}{2}$, 0, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, 2π, $-\frac{5\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$:

1) являются нулями функции $y = \operatorname{ctg} x$;
2) не принадлежат области определения функции $y = \operatorname{ctg} x$?

19.4. Какие из чисел $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, 3π:

1) являются нулями функции $y = \operatorname{tg} x$;

2) не принадлежат области определения функции $y = \operatorname{tg} x$?

19.5. Сравните:

1) $\operatorname{tg}(-38°)$ и $\operatorname{tg}(-42°)$;

2) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$ и $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{15}$;

3) $\operatorname{tg} 130°$ и $\operatorname{tg} 150°$;

4) $\operatorname{tg} 0{,}9\pi$ и $\operatorname{tg} 1{,}2\pi$;

5) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 1{,}5$;

6) $\operatorname{ctg} 24°$ и $\operatorname{ctg} 28°$;

7) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$ и $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{7}$;

8) $\operatorname{ctg}(-40°)$ и $\operatorname{ctg}(-60°)$;

9) $\operatorname{ctg} 0{,}4\pi$ и $\operatorname{ctg} 1{,}4\pi$;

10) $\operatorname{ctg} 2$ и $\operatorname{ctg} 3$.

19.6. Сравните:

1) $\operatorname{tg} 100°$ и $\operatorname{tg} 92°$;

2) $\operatorname{ctg} 100°$ и $\operatorname{ctg} 92°$;

3) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}$ и $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}$ и $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$;

5) $\operatorname{tg}(-1)$ и $\operatorname{tg}(-1{,}2)$;

6) $\operatorname{ctg}(-3)$ и $\operatorname{ctg}(-3{,}1)$.

19.7. Постройте график функции:

1) $y = -\operatorname{tg} x$;
2) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
3) $y = \operatorname{tg} 3x$.

19.8. Постройте график функции:

1) $y = \operatorname{ctg} x - 1$;
2) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
3) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

19.9. Возможно ли равенство:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}\operatorname{tg} 80°$;
2) $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{18}$;
3) $\cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{9}$?

19.10. Сравните:

1) $\sin 78°$ и $\operatorname{tg} 78°$;
2) $\sin 40°$ и $\operatorname{ctg} 20°$.

19.11. Постройте график функции:

1) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$;
2) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

19.12. Постройте график функции:

1) $y = 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;
2) $y = \operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right)$.

19.13. Постройте график функции:

1) $y = \left(\sqrt{\operatorname{ctg} x}\right)^2$;

2) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}|x|$;

3) $y = \sqrt{-\operatorname{tg}^2 x}$;

4) $y = \operatorname{ctg} x - \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}$;

5) $y = |\operatorname{tg} x|$.

19.14. Постройте график функции:

1) $y = \left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^2$;
2) $y = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}|x|$;
3) $y = \sqrt{-\operatorname{ctg}^2 x}$;
4) $y = \dfrac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$;
5) $y = \operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$;
6) $y = |\operatorname{ctg} x|$.

Упражнения для повторения

19.15. Между числами –4 и 5 вставьте пять таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

19.16. Какие три числа надо вставить между числами 256 и 1, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию?

§ 20. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

В этом параграфе установим тождества, связывающие значения тригонометрических функций одного и того же аргумента.

Координаты любой точки P $(x; y)$ единичной окружности удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Поскольку $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, где α – угол поворота, в результате которого из точки P_0 $(1; 0)$ была получена точка P, то

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad (1)$$

Обратим внимание на то, что точка P на единичной окружности выбрана произвольно. Поэтому тождество (1) справедливо для любого α. Его называют **основным тригонометрическим тождеством**.

Используя основное тригонометрическое тождество, найдём зависимость между тангенсом и косинусом, а также между котангенсом и синусом.

Пусть $\cos\alpha \neq 0$. Разделим обе части равенства (1) на $\cos^2\alpha$. Получим:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Отсюда

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

Это тождество верно для всех α, при которых $\cos\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пусть $\sin\alpha \neq 0$. Разделим обе части равенства (1) на $\sin^2\alpha$. Получим:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Отсюда

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\boxed{\mathbf{1 + ctg^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}}$$

Это тождество верно для всех α, при которых $\sin\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Связь между тангенсом и котангенсом можно установить с помощью равенств $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Имеем:

$$\boxed{\mathbf{tg\,\alpha\, ctg\,\alpha = 1}}$$

Это тождество верно для всех α, при которых $\sin\alpha \neq 0$ и $\cos\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \pi k$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Заметим, что эти два ограничения для α можно объединить в одно: $\alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 1. Упростите выражение:

1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x$; 2) $\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi$; 3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Решение. 1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

2) $\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1+\cos\alpha} = 1 - \cos\alpha$. ◄

Пример 2. Докажите тождество:

1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$; 2) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta = 1$.

Решение.

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\left(\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right):\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\operatorname{tg}\beta\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+1}{\operatorname{tg}\beta}:\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}=$
$=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta.$

2) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=$
$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$ ◀

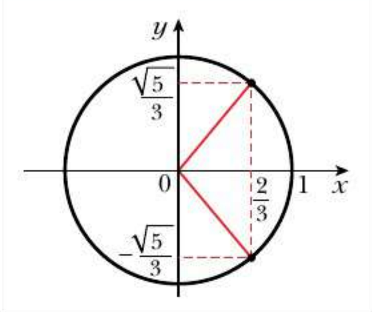


Рис. 20.1

__**Пример 3.**__ Известно, что $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$. Вычислите $\sin\alpha$.

Решение. Имеем:

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$. Отсюда $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ или $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Рисунок 20.1 иллюстрирует полученный результат. ◀

__**Пример 4.**__ Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{7}{25}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

Решение. Имеем:

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2=1-\frac{49}{625}=\frac{576}{625}.$$

Поскольку $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha<0$, следовательно, $\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{576}{625}}=$ $=-\dfrac{24}{25}$.

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{7}{25}:\left(-\dfrac{24}{25}\right)=\dfrac{7}{24}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{24}{7}$. ◀

__**Пример 5.**__ Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{16}{63}$, $90^\circ<\alpha<270^\circ$. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Решение. Имеем: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{63}{16}$.

$\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\dfrac{256}{3\,969}=\dfrac{4\,225}{3\,969}$; $\sin^2\alpha=\dfrac{3\,969}{4\,225}=\left(\dfrac{63}{65}\right)^2.$

Поскольку $\operatorname{ctg}\alpha>0$ и $90^\circ<\alpha<270^\circ$, то $180^\circ<\alpha<270^\circ$. Следовательно, $\sin\alpha<0$. Тогда $\sin\alpha=-\dfrac{63}{65}$.

Имеем: $\cos\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha=\dfrac{16}{63}\cdot\left(-\dfrac{63}{65}\right)=-\dfrac{16}{65}$. ◀

1. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
2. Какое тождество связывает тангенс и косинус одного и того же угла? Для каких значений угла верно это тождество?
3. Какое тождество связывает котангенс и синус одного и того же угла? Для каких значений угла верно это тождество?
4. Какое тождество связывает тангенс и котангенс одного и того же угла? Для каких значений угла верно это тождество?

Упражнения

20.1. Упростите выражение:

1) $1 - \cos^2 \alpha$;
2) $\sin^2 \beta - 1$;
3) $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + 1$;
4) $1 - \sin^2 3\alpha - \cos^2 3\alpha$;
5) $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$;
6) $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$;
7) $1 - \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$;
8) $\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$;
9) $\dfrac{\sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta} \cdot \operatorname{ctg}^2 \beta$;
10) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.

20.2. Упростите выражение:

1) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \operatorname{ctg}^2 5\alpha$;
2) $\sin \dfrac{\alpha}{3} \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{3}$;
3) $1 - \dfrac{1}{\sin^2 \gamma}$;
4) $\dfrac{\sin^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha - 1} + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$;
5) $(\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha)^2 + (\operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha)^2$;
6) $\dfrac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)}$;
7) $\left(\dfrac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha\right)\left(\dfrac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha\right)$;
8) $(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \beta)^2 - (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \beta)^2 \operatorname{tg}$.

20.3. Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin \alpha = \dfrac{1}{4}$ и $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{13}}{4}$;
2) $\operatorname{tg} \alpha = 2{,}5$ и $\operatorname{ctg} \alpha = 0{,}6$?

20.4. Могут ли одновременно выполняться равенства:

1) $\sin \alpha = \dfrac{2}{5}$ и $\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$;
2) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{4}{9}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = 1\dfrac{1}{4}$?

20.5. Могут ли $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ одновременно быть равными единице?

20.6. Могут ли значения выражений $|\operatorname{tg} \alpha|$ и $|\operatorname{ctg} \alpha|$ быть: 1) оба больше 1; 2) оба меньше 1?

20.7. Упростите выражение:

1) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2$;

2) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;

4) $\operatorname{ctg}x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$;

5) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha}$;

7) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$;

8) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\gamma}$;

9) $\cos^4\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$;

10) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$;

11) $\cos(-\alpha)+\cos\alpha\operatorname{tg}^2(-\alpha)$;

12) $\dfrac{1+\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)}-\operatorname{tg}(-\beta)$.

20.8. Упростите выражение:

1) $(1+\operatorname{ctg}\beta)^2+(1-\operatorname{ctg}\beta)^2$;

2) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2)$;

3) $\operatorname{tg}x+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;

4) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}+\dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$;

5) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

6) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$;

7) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha-1$;

8) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}\alpha+\sin^2(-\alpha)$.

20.9. Найдите значения тригонометрических функций аргумента α, если:

1) $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$;

2) $\sin\alpha=0{,}6$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=2$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{4}{3}$ и $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

20.10. Найдите значения тригонометрических функций аргумента α, если:

1) $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$ и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha=-7$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

20.11. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$;

2) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

3) $\dfrac{\sqrt{3}-2\sin\alpha}{2\cos\alpha-1}=\dfrac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha+\sqrt{3}}$;

4) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\operatorname{ctg}^6\alpha$;

5) $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

6) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

20.12. Докажите тождество:

1) $\sin^4\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^4\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

3) $1 + (\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

20.13. Докажите тождество:

1) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

20.14. Докажите тождество $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) = -1$.

20.15. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$;

2) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

20.16. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 7\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{4}$.

20.17. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = b$. Найдите:

1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$; 3) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

20.18. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = b$. Найдите:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$.

20.19. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$.

20.20. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $3\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$.

20.21. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\cos^2\beta(1 + \operatorname{tg}\beta) + \sin^2\beta(1 + \operatorname{ctg}\beta)}$, если $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$;

2) $\dfrac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

20.22. Упростите выражение $\sin\alpha - \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}$, если $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Упражнения для повторения

20.23. Докажите, что функция:

1) $y = \dfrac{7}{x + 5}$ убывает на промежутке $(-5; +\infty)$;

2) $y = 6x - x^2$ возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$.

20.24. Найдите значение выражения:

1) $\left(\dfrac{a^{\frac{8}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ при $a = 0{,}008$; 2) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}$ при $a = 0{,}0625$.

§ 21. Формулы сложения

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ через тригонометрические функции углов α и β.

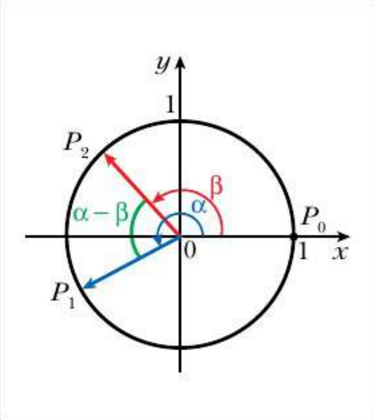
Докажем, что

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Пусть точки P_1 и P_2 получены в результате поворота точки P_0 (1; 0) на углы α и β соответственно.

Рассмотрим случай, когда $0 \leqslant \alpha - \beta \leqslant \pi$. Тогда угол между векторами $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_2}$ равен $\alpha - \beta$ (рис. 21.1). Координаты точек P_1 и P_2 соответственно равны $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ и $(\cos\beta;\ \sin\beta)$. Тогда вектор $\overrightarrow{OP_1}$ имеет координаты $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, а вектор $\overrightarrow{OP_2}$ — $(\cos\beta;\ \sin\beta)$.

Рис. 21.1



Выразим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_2}$ через их координаты:

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

В то же время по определению скалярного произведения векторов можно записать:

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \left|\overrightarrow{OP_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP_2}\right| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

Отсюда получаем формулу, которую называют **косинус разности**:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \qquad (1)$$

Заметим, что формула (1) не изменится и в том случае, когда $(\alpha - \beta) \notin [0;\ \pi]$.

Докажем формулу **косинуса суммы**:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Имеем: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Докажем формулы **синуса суммы и синуса разности**:

$$\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boldsymbol{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

С помощью формулы (1) докажем, что

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

Имеем: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 0 \cdot \cos\alpha + 1 \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$.

Теперь докажем, что

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

Имеем: $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Тогда $\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Формулы **тангенса суммы и тангенса разности** имеют вид

$$\boldsymbol{\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}} \qquad (3)$$

Докажем формулу (2). Имеем:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Пусть $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$. Полученную дробь можно переписать так:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулу тангенса разности (3) докажите самостоятельно.

Тождество (2) верно для всех α и β, при которых $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$.

Тождество (3) верно для всех α и β, при которых $\cos(\alpha-\beta)\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$.

Пример 1. Упростите выражение:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

2) $\sin(\alpha+45^\circ)\cos(\alpha-45^\circ)-\cos(\alpha+45^\circ)\sin(\alpha-45^\circ)$;

3) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos(60^\circ+\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}$.

Решение. 1) Применив формулы синуса суммы и синуса разности, получаем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)-\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\sin\alpha.$$

2) Заменим данное выражение на синус разности аргументов $\alpha+45^\circ$ и $\alpha-45^\circ$. Получаем:

$$\sin(\alpha+45^\circ)\cos(\alpha-45^\circ)-\cos(\alpha+45^\circ)\sin(\alpha-45^\circ)=$$
$$=\sin((\alpha+45^\circ)-(\alpha-45^\circ))=\sin(\alpha+45^\circ-\alpha+45^\circ)=\sin 90^\circ=1.$$

3) Имеем: $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos(60^\circ+\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+2(\cos 60^\circ\cos\alpha-\sin 60^\circ\sin\alpha)}{2(\sin 60^\circ\cos\alpha+\cos 60^\circ\sin\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\left(\dfrac{1}{2}\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\sin\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$ ◄

Пример 2. Докажите тождество: 1) $\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

Решение. 1) $\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha - \frac{\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$

$= \frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

2) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$. ◀

Пример 3. Найдите значение выражения $\frac{1 - \operatorname{tg}70^\circ \operatorname{tg}65^\circ}{\operatorname{tg}70^\circ + \operatorname{tg}65^\circ}$.

Решение. Используя формулу тангенса суммы углов 70° и 65°, получаем: $\frac{1 - \operatorname{tg}70^\circ \operatorname{tg}65^\circ}{\operatorname{tg}70^\circ + \operatorname{tg}65^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg}(70^\circ + 65^\circ)} = \frac{1}{\operatorname{tg}135^\circ} = \operatorname{ctg}135^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ - 45^\circ) =$
$= -\operatorname{ctg}45^\circ = -1$. ◀

Пример 4. Найдите $\cos 15^\circ$.

Решение. Имеем: $\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ =$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. ◀

Пример 5. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$.

Решение. Представим данное выражение в виде синуса суммы. Для этого умножим и разделим данное выражение на число 2:

$$\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right).$$

Учитывая, что $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$, получаем:

$$\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2(\sin 30^\circ \cos\alpha + \cos 30^\circ \sin\alpha) = 2\sin(30^\circ + \alpha).$$

Следовательно, наибольшее значение данного выражения равно 2 (это значение данное выражение принимает, например, при $\alpha = 60^\circ$), наименьшее значение равно -2 (это значение данное выражение принимает, например, при $\alpha = -120^\circ$). ◀

1. Какие формулы называют формулами сложения?

2. Запишите формулу:

1) косинуса разности;
2) косинуса суммы;
3) синуса суммы;
4) синуса разности;
5) тангенса суммы;
6) тангенса разности.

3. Чему равен $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$? $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$?

Упражнения

21.1. Упростите выражение:

1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$;
2) $\sin(30^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin(\alpha-45^\circ)-\sin\alpha+\cos\alpha$;
4) $2\cos(60^\circ-\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

21.2. Упростите выражение:

1) $\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)$;
2) $\sin(30^\circ-\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha-\sin\alpha$.

21.3. Упростите выражение:

1) $\sin\alpha\cos4\alpha+\cos\alpha\sin4\alpha$;
2) $\cos17^\circ\cos43^\circ-\sin17^\circ\sin43^\circ$;
3) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;
4) $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$;
5) $\sin53^\circ\cos7^\circ-\cos53^\circ\sin(-7^\circ)$;
6) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;
7) $(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2$;
8) $\dfrac{\sin20^\circ\cos5^\circ-\cos20^\circ\sin5^\circ}{\cos10^\circ\cos5^\circ-\sin10^\circ\sin5^\circ}$;
9) $\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta$.

21.4. Упростите выражение:

1) $\cos6\alpha\cos2\alpha-\sin6\alpha\sin2\alpha$;
2) $\sin12^\circ\cos18^\circ+\sin18^\circ\cos12^\circ$;
3) $\sin(-15^\circ)\cos75^\circ+\cos15^\circ\sin75^\circ$;
4) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;
5) $\dfrac{\cos64^\circ\cos4^\circ+\sin64^\circ\sin4^\circ}{\sin19^\circ\cos41^\circ+\sin41^\circ\cos19^\circ}$;
6) $\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta$.

21.5. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

21.6. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{tg}\beta = 5$. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

21.7. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}13^\circ + \operatorname{tg}47^\circ}{1 - \operatorname{tg}13^\circ \operatorname{tg}47^\circ}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}1^\circ - \operatorname{tg}46^\circ}{1 + \operatorname{tg}1^\circ \operatorname{tg}46^\circ}$; 3) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}27^\circ \operatorname{tg}33^\circ}{\operatorname{tg}27^\circ + \operatorname{tg}33^\circ}$.

21.8. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}24^\circ + \operatorname{tg}36^\circ}{1 - \operatorname{tg}24^\circ \operatorname{tg}36^\circ}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}5\alpha - \operatorname{tg}3\alpha}{1 + \operatorname{tg}5\alpha \operatorname{tg}3\alpha}$.

21.9. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\sin\beta} = 1$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(45^\circ + \alpha)}{2\sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

3) $\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$;

4) $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin(60^\circ - \alpha)}{2\cos(30^\circ - \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$.

21.10. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta) + \sin\beta\cos\alpha} = 1$;

2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin(45^\circ - \alpha)}{2\sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{2}$;

3) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

21.11. Дано: $\sin\alpha = \dfrac{9}{41}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найдите $\sin(\alpha + 45^\circ)$.

21.12. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Найдите $\cos(60^\circ - \alpha)$.

21.13. Найдите $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ и $\cos\beta = -\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

21.14. Найдите $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = -\dfrac{15}{17}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ и $\cos\beta = \dfrac{7}{25}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

21.15. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\sin\beta = \dfrac{3}{5}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

21.16. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$. Найдите $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$.

21.17. Найдите:

1) $\sin 15^\circ$; 2) $\sin 105^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 105^\circ$.

21.18. Найдите:

1) $\cos 75^\circ$; 2) $\sin 75^\circ$.

21.19. Докажите тождество:

1) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

21.20. Докажите тождество $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

21.21. Упростите выражение:

1) $\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4} + \sin\dfrac{\alpha}{2}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha$; 3) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}$.

21.22. Упростите выражение:

1) $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\cos 4\alpha - \sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha$.

21.23. Докажите тождество:

1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

2) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - 2 = 2\cos(\alpha+\beta)$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} + 2\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{2}{\cos^2\alpha}$.

21.24. Докажите тождество:

1) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) - \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 0$.

21.25. Найдите наибольшее значение выражения:

1) $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha + \cos\alpha$.

21.26. Найдите наименьшее значение выражения:

1) $\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$; 2) $\sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{6}\cos\alpha$.

21.27. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{\operatorname{tg}2x - \operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}$.

21.28. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{\operatorname{tg}3x - \operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}x}$; 2) $y = \dfrac{\operatorname{tg}x - 1}{\operatorname{tg}x + 1}$.

Упражнения для повторения

21.29. При каких значениях x значения выражений $4x+5$, $7x-1$ и x^2+2 будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите три этих члена прогрессии.

21.30. При каких значениях x значения выражений $x-1$, $1-2x$ и $x+7$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите три этих члена прогрессии.

§ 22. Формулы приведения

Периодичность тригонометрических функций позволяет сводить вычисление значений синуса и косинуса к случаю, когда значение аргумента принадлежит промежутку $[0; 2\pi]$, а вычисление значений тангенса и котангенса – к случаю, когда значение аргумента принадлежит промежутку $[0; \pi]$. В этом параграфе мы рассмотрим формулы, позволяющие в подобных вычислениях ограничиться только углами из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Каждый угол из промежутка $[0; 2\pi]$ можно представить в виде $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, или $\pi \pm \alpha$, или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Например, $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$.

Вычисление синусов и косинусов углов вида $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ можно свести к вычислению синуса или косинуса угла α. Например:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = -\sin\alpha.$$

Применив формулы сложения, аналогично можно получить:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$$

Эти формулы называют **формулами приведения для синуса**.

Следующие формулы называют **формулами приведения для косинуса**:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$

Вычисление тангенсов и котангенсов углов вида $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ можно свести к вычислению тангенса или котангенса угла α. Например:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Следующие формулы называют **формулами приведения для тангенса и котангенса**:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$$

Проанализировав записанные формулы приведения, можно заметить закономерности, которые делают заучивание этих формул не обязательным.

Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими правилами.

1. ***В правой части равенства ставят тот знак, который имеет левая часть при условии, что*** $0<\alpha<\frac{\neq}{2}$.

2. ***Если в левой части формулы угол имеет вид*** $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ***или*** $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, ***то синус меняют на косинус, тангенс — на котангенс, и наоборот. Если угол имеет вид*** $\pi\pm\alpha$, ***то замены функции не происходит.***

Покажем, как действуют эти правила для выражения $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

Предположив, что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, приходим к выводу: $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ является углом III четверти. Тогда $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0$. По первому правилу в правой части равенства должен стоять знак «–».

Поскольку аргумент имеет вид $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, то по второму правилу следует поменять синус на косинус.

Следовательно, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

Пример 1. Упростите выражение: 1) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\operatorname{ctg}(\alpha-90^\circ)$.

Решение. 1) Имеем: $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2=(-\sin\alpha)^2=\sin^2\alpha$.

2) $\operatorname{ctg}(\alpha-90^\circ)=-\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$. ◄

Пример 2. Замените значение тригонометрической функции значением функции острого угла: 1) $\cos\frac{9\pi}{10}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$; 3) $\operatorname{tg}(-125^\circ)$.

Решение.

1) $\cos\frac{9\pi}{10}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)=-\cos\frac{\pi}{10}$;

2) $\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7}$;

3) $\operatorname{tg}(-125^\circ)=-\operatorname{tg}125^\circ=-\operatorname{tg}(90^\circ+35^\circ)=-(-\operatorname{ctg}35^\circ)=\operatorname{ctg}35^\circ$. ◄

Заметим, что задачи, рассмотренные в примере 2, допускают другое решение. Например, если число $\frac{9\pi}{10}$ представить в виде $\frac{9\pi}{10}=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}$, то можно записать:

$$\cos\frac{9\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)=-\sin\frac{2\pi}{5}.$$

Пример 3. Вычислите: 1) $\sin 930^\circ$; 2) $\cos(-480^\circ)$.

Решение. 1) $\sin 930^\circ=\sin(360^\circ\cdot 2+210^\circ)=\sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=$ $=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$;

2) $\cos(-480^\circ)=\cos 480^\circ=\cos(360^\circ+120^\circ)=\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=$ $=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$. ◄

Пример 4. Вычислите $\operatorname{tg}41^\circ\operatorname{tg}42^\circ\operatorname{tg}43^\circ\operatorname{tg}44^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}49^\circ$.

Решение. Имеем: $\operatorname{tg}49^\circ=\operatorname{ctg}41^\circ$, $\operatorname{tg}48^\circ=\operatorname{ctg}42^\circ$ и т. д. Тогда, объединив попарно множители, равноудалённые от концов произведения, получим четыре произведения, каждое из которых равно 1:

$$\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 49^\circ = \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 48^\circ = \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 47^\circ = \operatorname{tg} 44^\circ \operatorname{tg} 46^\circ = 1.$$

Ещё один множитель данного произведения $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 49^\circ = 1. ◄$$

Сформулируйте правила, которыми можно руководствоваться при применении формул приведения.

Упражнения

22.1. Упростите выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 4) $\cos(-\alpha + 270^\circ)$; 7) $\operatorname{ctg}^2(90^\circ + \alpha)$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 5) $\cos(\alpha - 180^\circ)$; 8) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

3) $\sin(\pi - \alpha)$; 6) $\cos^2(3\pi - \alpha)$; 9) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

22.2. Упростите выражение:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 3) $\cos(\pi - \alpha)$; 5) $\sin(180^\circ + \alpha)$;

2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 4) $\operatorname{ctg}(\alpha - 270^\circ)$; 6) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$.

22.3. Замените значение тригонометрической функции значением функции острого угла:

1) $\cos 123^\circ$; 2) $\sin 216^\circ$; 3) $\cos(-218^\circ)$; 4) $\cos\frac{5\pi}{9}$.

22.4. Замените значение тригонометрической функции значением функции острого угла:

1) $\operatorname{tg} 124^\circ$; 2) $\sin(-305^\circ)$; 3) $\operatorname{ctg}(-0{,}7\pi)$; 4) $\sin\frac{14\pi}{15}$.

22.5. Вычислите:

1) $\cos 225^\circ$; 2) $\sin 240^\circ$; 3) $\cos\frac{5\pi}{4}$; 4) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

22.6. Вычислите:

1) $\operatorname{tg} 210^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} 315^\circ$; 3) $\cos(-150^\circ)$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

22.7. Вычислите:

1) $\dfrac{\sin^2 315^\circ \cos 300^\circ + \operatorname{tg}(-315^\circ)}{\sin(-120^\circ)\cos 150^\circ}$; 3) $\dfrac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 160^\circ \cos 100^\circ}{\sin 21^\circ \cos 9^\circ + \cos 159^\circ \cos 99^\circ}$;

2) $\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{6}\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$; 4) $\dfrac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cos 25^\circ}$.

22.8. Найдите значение выражения:

1) $4\cos 225^\circ - 6\cos 120^\circ + 3\operatorname{ctg} 300^\circ + \operatorname{tg} 240^\circ$;

2) $\dfrac{6\cos^2(-240^\circ)\operatorname{ctg} 210^\circ}{\sin(-300^\circ)\cos^2 180^\circ}$;

3) $\sin\dfrac{7\pi}{4}\cos\dfrac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{3}\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{6}$;

4) $\dfrac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 19^\circ}$.

22.9. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin(\pi + \alpha)\cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha)}$;

2) $\sin(\pi - \beta)\cos\left(\beta - \dfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right)\cos(\pi - \beta)$;

3) $\sin(90^\circ + \alpha)\sin(180^\circ - \alpha)(\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(270^\circ - \alpha))$;

4) $\sin^2(\pi - x) + \operatorname{tg}^2(\pi - x)\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\cos(x - 2\pi)$;

5) $\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x)\right)^2 + \left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)\right)^2$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi - x)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}{\cos(\pi + x)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}$.

22.10. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha)\sin(\alpha + 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\cos\alpha$;

2) $\sin(\pi + x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi + x)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = -1$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)\cos(180^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha)\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)} = 1$;

4) $\sin(2\pi - \varphi)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \varphi\right) - \cos(\varphi - \pi) - \sin(\varphi - \pi) = \sin\varphi$.

22.11. Вычислите:

1) $\operatorname{ctg} 5^\circ \operatorname{ctg} 15^\circ \operatorname{ctg} 25^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 75^\circ \operatorname{ctg} 85^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 160^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ$;

3) $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \ldots + \sin 359^\circ + \sin 360^\circ$.

22.12. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}30^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}70^\circ\operatorname{tg}80^\circ$;

2) $\operatorname{ctg}15^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}45^\circ+\ldots+\operatorname{ctg}165^\circ$.

22.13. Докажите тождество:

1) $\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2+\left(\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4}+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\right)^2=\frac{2}{\sin^2\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1$;

3) $\dfrac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-1}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$.

22.14. Найдите значение выражения $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{11}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{22}$.

22.15. Упростите выражение:

1) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$;

2) $\dfrac{\cos^2(20^\circ-\alpha)}{\sin^2(70^\circ+\alpha)}+\operatorname{tg}(\alpha+10^\circ)\operatorname{ctg}(80^\circ-\alpha)$.

Упражнения для повторения

22.16. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x^2-10}{x}\geqslant 3$; 2) $\dfrac{x^2+x}{x-2}\geqslant\dfrac{6}{x-2}$; 3) $\dfrac{x^2-3x-4}{2x^2-x-3}\leqslant 0$.

22.17. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

§ 23. Формулы двойного и половинного углов

Формулы, выражающие тригонометрические функции угла 2α через тригонометрические функции угла α, называют **формулами двойного угла**.

В формулах сложения

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

положим $\beta = \alpha$. Получим:

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Эти формулы соответственно называют **формулами косинуса, синуса и тангенса двойного угла**.

Поскольку $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ и $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, то из формулы $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ получаем ещё две формулы:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

Иногда эти формулы удобно использовать в таком виде:

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha,$$
$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

или в таком виде:

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

Две последние формулы называют **формулами понижения степени**.

Пример 1. Примените формулы двойного угла к выражению:

1) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$.

Решение.

1) Имеем: $\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \frac{\alpha}{4}$. Тогда $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{4}$.

2) Имеем: $\frac{\pi}{3} + \alpha = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)$. Тогда $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)}$. ◄

Пример 2. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}}$; 3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$; 5) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$; 4) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta$; 6) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

Решение. 1) Применяя формулу косинуса двойного угла к выражению $\cos\alpha$, а затем формулу разности квадратов, получаем:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=-\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

2) Применяя формулу синуса двойного угла, получаем:

$$\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos2\alpha.$

4) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\cdot4\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\sin^2 2\beta=\cos4\beta.$

5) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=-\dfrac{\cos2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$

$$=-\frac{2\cos2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{2\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=-2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

6) Поскольку сумма углов $\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ и $\dfrac{\pi}{4}+\alpha$ равна $\dfrac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=$ $=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$. Тогда

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\cos2\alpha}{2\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

Применяя формулу синуса двойного угла, получаем:

$$\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1.$$

Пример 3. Представьте в виде произведения выражение:
1) $1+\cos 4\alpha$; 2) $1-\cos 6\alpha$; 3) $1-\sin\alpha$.

Решение. 1) Применив формулу $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, получим:

$$1+\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha.$$

2) Применив формулу $1-\cos 2x=2\sin^2 x$, получим:

$$1-\cos 6\alpha=2\sin^2 3\alpha.$$

3) С помощью формулы приведения заменим синус косинусом и применим формулу $1-\cos 2x=2\sin^2 x$:

$$1-\sin\alpha=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Пример 4. Докажите тождество $\dfrac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4}$.

Решение. Имеем: $\dfrac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}-2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}=$

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}\right)}=-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}.$$

Формулы, выражающие тригонометрические функции угла $\frac{\alpha}{2}$ через тригонометрические функции угла α, называют **формулами половинного аргумента**.

Заменив в формулах понижения степени α на $\frac{\alpha}{2}$, получим:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Почленное деление первого равенства на второе приводит к формуле

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Теперь можно записать:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Эти формулы называют соответственно **формулами синуса, косинуса и тангенса половинного угла**.

Пример 5. Дано: $\operatorname{tg}3\alpha = 3\frac{3}{7}$, $60^\circ < \alpha < 90^\circ$. Найдите $\sin\frac{3\alpha}{2}$, $\cos\frac{3\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}$.

Решение. Имеем: $\frac{1}{\cos^2 3\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 3\alpha = 1 + \left(\frac{24}{7}\right)^2 = \frac{625}{49}$; $\cos^2 3\alpha = \frac{49}{625}$.

Так как $60^\circ < \alpha < 90^\circ$, то $180^\circ < 3\alpha < 270^\circ$. Следовательно, $\cos 3\alpha < 0$. Тогда $\cos 3\alpha = -\frac{7}{25}$.

Так как $90^\circ < \frac{3\alpha}{2} < 135^\circ$, то $\sin\frac{3\alpha}{2} > 0$, а $\cos\frac{3\alpha}{2} < 0$. Тогда

$$\sin\frac{3\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 3\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{25}\right)} = \frac{4}{5},$$

$$\cos\frac{3\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos 3\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{7}{25}\right)} = -\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}} = -\frac{4}{3}. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найдите $\sin 22^\circ 30'$ и $\cos 22^\circ 30'$.

Решение. Используя формулы половинного угла, получаем:

$$\sin 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}. \blacktriangleleft$$

С помощью формул двойного угла можно выразить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Имеем: $\sin\alpha = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Предположив, что $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$, разделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}}$$

Имеем: $\cos\alpha = \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Предположив, что $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$, разделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$:

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Пример 7. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$. Найдите $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Решение. Имеем: $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\cdot 3}{1+9} = 0{,}6$; $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} =$
$= \dfrac{1-9}{1+9} = -0{,}8$.

Тогда $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}6 - 0{,}8 = -0{,}2$. ◄

Упражнения

23.1. Примените формулы двойного угла к выражению:

1) $\cos\alpha$; 2) $\sin 3\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 4) $\cos 8\alpha$; 5) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\operatorname{tg} 7\alpha$; 7) $\sin(\alpha - \beta)$; 8) $\operatorname{tg} 3$.

23.2. Примените формулы двойного угла к выражению:

1) $\sin 10\alpha$; 2) $\cos\frac{\alpha}{4}$; 3) $\cos\left(\frac{x}{2} - 20^\circ\right)$; 4) $\operatorname{tg} 12\alpha$.

23.3. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$;

2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$;

3) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$;

4) $\dfrac{\sin 50^\circ}{2\cos 25^\circ}$;

5) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;

6) $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{4}$;

7) $\dfrac{\sin^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$;

8) $\left(\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{\alpha}{4}\right)$;

9) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha}$;

10) $\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin^4\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

11) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha}$;

12) $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha)}$.

23.4. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ}$;

2) $\cos 4\beta + \sin^2 2\beta$;

3) $\cos 6\alpha + 2\sin^2 3\alpha$;

4) $\frac{\cos 70^\circ}{\cos 35^\circ + \sin 35^\circ}$;

5) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}$;

6) $\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$;

7) $\frac{\sin 4\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}$;

8) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

9) $\sin^2(\beta - 45^\circ) - \cos^2(\beta - 45^\circ)$;

10) $\frac{2\operatorname{tg} 1{,}5\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 1{,}5\alpha}$.

23.5. Вычислите:

1) $2\sin 75^\circ \cos 75^\circ$;

2) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

3) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

4) $\sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30'$;

5) $\frac{2\operatorname{tg} 165^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 165^\circ}$;

6) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}{\operatorname{tg} 15^\circ}$.

23.6. Вычислите:

1) $\cos^2 22^\circ 30' - \sin^2 22^\circ 30'$;

2) $\frac{2\operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}$;

3) $2\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}$;

4) $1 - 2\cos^2\frac{\pi}{12}$.

23.7. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

23.8. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

23.9. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

23.10. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$.

23.11. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если:

1) $\operatorname{tg}\alpha = 4$;

2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

23.12. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если:

1) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$;

2) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

23.13. Представьте в виде произведения выражение:

1) $1 - \cos 4\alpha$;

2) $1 + \cos\frac{\alpha}{3}$;

3) $1 - \cos 50^\circ$;

4) $1 + \sin 2\alpha$.

23.24. Докажите тождество:

1) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}+2\alpha\right)=\sin 4\alpha$;

2) $1+2\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$;

3) $\frac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\frac{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^4\alpha$;

5) $\frac{\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$;

6) $\frac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}\sin 4\alpha$;

7) $\frac{2\cos 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2(45^\circ-\alpha)$.

23.25. Докажите тождество:

1) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+4\alpha\right)=-\sin 8\alpha$;

2) $1-2\cos 3\alpha+\cos 6\alpha=-4\sin^2\frac{3\alpha}{2}\cos 3\alpha$;

3) $\frac{\sin^2\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}=-\frac{1}{4}\sin 8\alpha$;

4) $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

23.26. Докажите, что $\operatorname{tg}15^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ=4$.

23.27. Докажите, что $\operatorname{tg}75^\circ-\operatorname{ctg}75^\circ=2\sqrt{3}$.

23.28. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=6$. Найдите $\sin\alpha-\cos\alpha$.

23.29. Дано: $\sin 2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $135^\circ<\alpha<180^\circ$. Найдите $\sin\alpha$.

23.30. Дано: $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $90^\circ<\frac{\alpha}{2}<135^\circ$. Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$.

23.31. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

23.32. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$.

23.33. Упростите выражение:

1) $\cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha$;

2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin 2\alpha}$;

3) $\dfrac{2\sin 4\alpha\left(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha\right)}{1 + \operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}$;

4) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}$.

23.34. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\left(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha\right)}$;

2) $\dfrac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin 3\alpha\cos\alpha - \cos 3\alpha\sin\alpha}$.

23.35. Докажите, что:

1) $\sin 18^\circ\cos 36^\circ = \dfrac{1}{4}$;

2) $8\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9} = 1$;

3) $\sin 6^\circ\sin 42^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ = \dfrac{1}{16}$.

23.36. Докажите, что:

1) $\sin 54^\circ\cos 72^\circ = \dfrac{1}{4}$;

2) $\cos 3\alpha\cos 6\alpha\cos 12\alpha = \dfrac{\sin 24\alpha}{8\sin 3\alpha}$.

23.37. Докажите тождество $\dfrac{3 + 4\cos\alpha + \cos 2\alpha}{3 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}^4\dfrac{\alpha}{2}$.

23.38. Упростите выражение $\dfrac{\cos^4(\alpha - \pi)}{\cos^4\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right) + \sin^4\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right) - 1}$.

Упражнения для повторения

23.39. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\dfrac{x+4}{x^2-4}$;

2) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$;

3) $\sqrt{6-7x}$;

4) $\dfrac{9}{\sqrt{3x+6}}$;

5) $\sqrt{7x-42} + \dfrac{1}{x^2-8x}$;

6) $\sqrt{-x^2+3x+4}$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}$;

8) $\dfrac{x+2}{\sqrt{35+2x-x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{8-4x}}$?

§ 24. Сумма и разность синусов (косинусов)

В этом параграфе рассмотрим формулы, позволяющие преобразовать сумму и разность синусов (косинусов) в произведение.

Запишем формулы сложения для синуса:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y, \qquad (1)$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y. \qquad (2)$$

Сложив почленно левые и правые части этих равенств, получим:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y. \qquad (3)$$

Введём обозначения:

$$x + y = \alpha,$$

$$x - y = \beta.$$

Заметим, что для любых α и β можно найти такие x и y, при которых будут выполняться эти равенства. Действительно, $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Тогда равенство (3) можно переписать так:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Это тождество называют **формулой суммы синусов**.

Вычтем почленно из равенства (1) равенство (2):

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\sin y.$$

Если использовать ранее введённые обозначения, то получим тождество, которое называют **формулой разности синусов**:

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Запишем формулы сложения для косинуса:

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y.$$

Складывая и вычитая почленно эти равенства, соответственно получаем:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y; \qquad (4)$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y. \qquad (5)$$

Отсюда, введя обозначения $x + y = \alpha$ и $x - y = \beta$, получим соответственно **формулы суммы и разности косинусов**:

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\boldsymbol{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Пример 1. Преобразуйте в произведение: 1) $\sin 26^\circ + \sin 14^\circ$; 2) $\cos\alpha - \cos 8\alpha$; 3) $\sin\alpha + \cos\alpha$; 4) $\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{7}$; 5) $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$.

Решение.

1) Применяя формулу суммы синусов, получаем:

$$\sin 26^\circ + \sin 14^\circ = 2\sin\frac{26^\circ + 14^\circ}{2}\cos\frac{26^\circ - 14^\circ}{2} = 2\sin 20^\circ \cos 6^\circ.$$

2) Применим формулу разности косинусов:

$$\cos\alpha - \cos 8\alpha = -2\sin\frac{\alpha + 8\alpha}{2}\sin\frac{\alpha - 8\alpha}{2} = 2\sin\frac{9\alpha}{2}\sin\frac{7\alpha}{2}.$$

3) $$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha}{2}\cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

4) Перейдём к разности косинусов:

$$\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{7} = \cos\frac{\pi}{8} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{5\pi}{14} =$$

$$= -2\sin\frac{\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{14}}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{8} - \frac{5\pi}{14}}{2} = 2\sin\frac{\frac{27\pi}{56}}{2}\sin\frac{\frac{13\pi}{56}}{2} = 2\sin\frac{27\pi}{112}\sin\frac{13\pi}{112}.$$

5) $$\sqrt{3} - 2\sin\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\alpha\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\alpha\right) =$$

$$= 2 \cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{3} - \alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3} + \alpha}{2} = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right).$$ ◄

Пример 2. Докажите тождество

$$\sin 4\alpha - \sin 5\alpha - \sin 6\alpha + \sin 7\alpha = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{11\alpha}{2}.$$

Решение. Сгруппируем первое слагаемое с четвёртым и второе с третьим, а затем применим формулу суммы синусов:

$$\sin 4\alpha - \sin 5\alpha - \sin 6\alpha + \sin 7\alpha = (\sin 4\alpha + \sin 7\alpha) - (\sin 5\alpha + \sin 6\alpha) =$$

$$= 2\sin\frac{11\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2} - 2\sin\frac{11\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{11\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Преобразуем разность косинусов, стоящую в скобках, в произведение:

$$2\sin\frac{11\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{11\alpha}{2}\left(-2\sin\frac{\frac{3\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2}\sin\frac{\frac{3\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}\right)=$$

$$=-4\sin\frac{11\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2},$$ что и требовалось доказать. ◄

Запишите формулу: 1) суммы синусов; 2) разности синусов; 3) суммы косинусов; 4) разности косинусов.

Упражнения

24.1. Преобразуйте в произведение:

1) $\cos 50° + \cos 20°$;
2) $\cos 2\alpha - \cos 4\alpha$;
3) $\sin\beta + \sin 4\beta$;
4) $\sin 5° - \sin 3°$;
5) $\cos\frac{\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{12}$;
6) $\sin(x+\alpha) + \sin(x-\alpha)$;
7) $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$;
8) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

24.2. Преобразуйте в произведение:

1) $\cos 16° - \cos 36°$;
2) $\sin 28° + \sin 12°$;
3) $\cos 3\alpha + \cos 5\alpha$;
4) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$;
5) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;
6) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

24.3. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin 8\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 2\alpha}$; 2) $\frac{\sin 5\alpha - \sin\alpha}{\cos 5\alpha - \cos\alpha}$; 3) $\frac{\cos 74° - \cos 14°}{\sin 74° + \sin 14°}$.

24.4. Упростите выражение:

1) $\frac{\cos 6\alpha + \cos 4\alpha}{\cos\alpha + \cos 9\alpha}$; 2) $\frac{\cos\alpha - \cos 11\alpha}{\sin 11\alpha - \sin\alpha}$; 3) $\frac{\cos 58° + \cos 32°}{\sin 58° + \sin 32°}$.

24.5. Преобразуйте в произведение:

1) $\sin 20° + \cos 20°$; 2) $\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}$; 3) $\sin\alpha - \cos\alpha$.

24.6. Преобразуйте в произведение:

1) $\sin 25° + \cos 55°$; 2) $\cos 22° - \sin 66°$; 3) $\sin\alpha + \cos\beta$.

24.7. Преобразуйте в произведение:

1) $1-2\cos\alpha$; 2) $\sqrt{3}+2\cos\alpha$; 3) $1-\sqrt{2}\sin\alpha$.

24.8. Преобразуйте в произведение:

1) $1-2\sin\alpha$; 2) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$; 3) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$.

24.9. Докажите тождество:

1) $\cos 3\alpha-\cos 4\alpha-\cos 5\alpha+\cos 6\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{9\alpha}{2}$;

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha$;

3) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$;

4) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha$;

5) $\frac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}$;

6) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha$;

7) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

8) $\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

9) $\left(\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\cdot\frac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha}=-4\sin 3\alpha$;

10) $\frac{(\cos\alpha-\cos 3\alpha)(\sin\alpha+\sin 3\alpha)}{1-\cos 4\alpha}=\sin 2\alpha$.

24.10. Докажите тождество:

1) $\sin 5\alpha+\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}$;

2) $\sin\alpha+\sin 3\alpha-\sin 2\alpha=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{3\alpha}{2}$;

3) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

5) $\frac{\cos\alpha-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin\alpha-\sin 2\alpha-\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}=\operatorname{ctg}3\alpha$;

6) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

7) $\dfrac{\sin 2\alpha \cos 4\alpha(1+\cos 2\alpha)}{(\sin 3\alpha+\sin\alpha)(\cos 3\alpha+\cos 5\alpha)}=\dfrac{1}{2}$;

8) $\left(\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 4\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{\sin 3\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)=4\operatorname{ctg}\alpha$.

24.11. Докажите тождество:

1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha=2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $\dfrac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}=\operatorname{ctg}2\alpha$;

3) $\sin^2\left(\dfrac{15\pi}{8}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{17\pi}{8}-2\alpha\right)=-\dfrac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

24.12. Докажите тождество:

1) $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha=-4\cos\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$;

2) $1-\sin\alpha-\cos\alpha=2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-45^\circ\right)$;

3) $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+2\alpha\right)=\sin 4\alpha$.

Упражнения для повторения

24.13. Решите уравнение:

1) $\sqrt{9+8x-x^2}=x-3$;

2) $\sqrt{x^2-x-6}=\sqrt{-2x}$;

3) $\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{5-2x}=2-2x$;

4) $\dfrac{5}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x-2}=3\sqrt{3x+1}$.

24.14. Упростите выражение $3\sqrt[3]{-2}+4\sqrt[3]{16}+6\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}-2\sqrt[3]{-6\dfrac{3}{4}}-\sqrt[3]{24}$.

§ 25. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

В § 24 в ходе доказательства формул суммы и разности синусов (косинусов) были получены тождества:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y;$$

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y;$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y.$$

Перепишем их так:

$$\boldsymbol{\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))}$$
$$\boldsymbol{\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))}$$
$$\boldsymbol{\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))}$$

Эти тождества называют **формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму**.

Пример 1. Преобразуйте произведение в сумму:

1) $\sin 15^\circ \cos 10^\circ$;
2) $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{8}$;
3) $\cos\alpha\cos 3\alpha$;
4) $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

Решение.

1) $\sin 15^\circ\cos 10^\circ=\frac{1}{2}(\sin(15^\circ-10^\circ)+\sin(15^\circ+10^\circ))=\frac{1}{2}(\sin 5^\circ+\sin 25^\circ)$;

2) $$\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{8}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right)-\cos\frac{5\pi}{24}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}-\cos\frac{5\pi}{24}\right);$$

3) $\cos\alpha\cos 3\alpha=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-3\alpha)+\cos(\alpha+3\alpha))=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)$;

4) $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=2\cdot\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta-\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta+\alpha-\beta))=$
$=\sin 2\beta+\sin 2\alpha$. ◄

Пример 2. Докажите тождество $4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\cos 3\alpha$.

Решение. Дважды применяя формулу преобразования произведения косинусов в сумму, получаем:

$$4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=$$
$$=2\cos\alpha(\cos(60^\circ-\alpha-60^\circ-\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha+60^\circ+\alpha))=$$
$$=2\cos\alpha(\cos 2\alpha+\cos 120^\circ)=2\cos\alpha\left(\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=2\cos\alpha\cos 2\alpha-\cos\alpha=\cos\alpha+\cos 3\alpha-\cos\alpha=\cos 3\alpha.$$ ◄

Упражнения

25.1. Преобразуйте в сумму произведение:

1) $\cos 15^\circ \cos 5^\circ$;
2) $2\cos 3\alpha \cos 2\alpha$;
3) $2\sin\frac{\neq}{10}\cos\frac{\neq}{40}$;
4) $\sin 48^\circ \sin 74^\circ$;
5) $2\sin\alpha \sin 2\alpha$;
6) $\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha)$.

25.2. Преобразуйте в сумму произведение:

1) $2\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{5}$;
2) $\sin 28^\circ \cos 24^\circ$;
3) $\sin 5\alpha \sin 3\alpha$;
4) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

25.3. Упростите выражение:

1) $2\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$;
2) $\sin\alpha(1 + 2\cos 2\alpha)$;
3) $2\cos\alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha$;
4) $\cos 2\alpha + 2\sin(\alpha + 30^\circ)\sin(\alpha - 30^\circ)$.

25.4. Упростите выражение:

1) $2\sin 2\alpha \sin\alpha + \cos 3\alpha$;
2) $\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$.

25.5. Докажите тождество:

1) $\sin\alpha \sin 3\alpha + \sin 4\alpha \sin 8\alpha = \sin 7\alpha \sin 5\alpha$;
2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 6\alpha\right) = \sin 4\alpha \cos\alpha$.

25.6. Докажите тождество:

1) $\cos 3\alpha \cos 6\alpha - \cos 4\alpha \cos 7\alpha = \sin 10\alpha \sin\alpha$;
2) $2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{4} + 15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4} - 15^\circ\right) = \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{3\alpha}{4}\right)$.

25.7. Упростите выражение:

1) $\sin^2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$;
2) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$;
3) $\cos^2(45^\circ + \alpha) - \cos^2(30^\circ - \alpha) + \sin 15^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha)$.

25.8. Упростите выражение:

1) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$;
2) $\cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \sin(75^\circ - 2\alpha)\cos 75^\circ$.

25.9. Докажите, что:

1) $16\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = 3$;
2) $8\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 1$.

25.10. Докажите тождество $4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{3\alpha}{2}$.

25.11. Докажите равенство:

1) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$;

2) $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \ldots + \sin 50^\circ = \frac{\sin 25^\circ}{2\sin 5^\circ}$.

25.12. Докажите равенство $\cos\frac{\pi}{19} + \cos\frac{3\pi}{19} + \ldots + \cos\frac{17\pi}{19} = \frac{1}{2}$.

Упражнения для повторения

25.13. Задайте формулой линейную функцию $y = f(x)$, если $f(-10) = -2$, $f(5) = 1$.

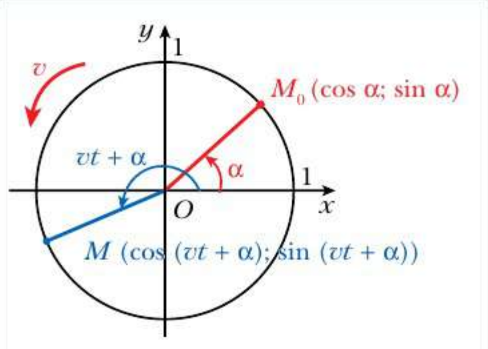
25.14. Найдите нули функции $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{x}$.

Когда сделаны уроки

Гармонические колебания

В этой главе вы ознакомились с тригонометрическими функциями $y = \sin x$, $y = \cos x$ и их свойствами. При рассмотрении графиков этих функций можно вспомнить, что в повседневной жизни вы видели похожие кривые и поверхности. Например, форма волны на море напоминает синусоиду. И это не случайно. Многие физические величины периодически изменяются и могут быть описаны с помощью тригонометрических функций $y = A\sin(kx + \alpha)$ или $y = A\cos(kx + \alpha)$, где A, k, α – заданные числа, $A \neq 0$, $k \neq 0$. В таком случае говорят, что физическая величина осуществляет **гармоническое колебание**, а соответствующую тригонометрическую функцию называют **функцией гармонического колебания**.

Рис. 25.1

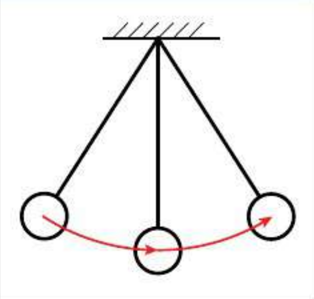


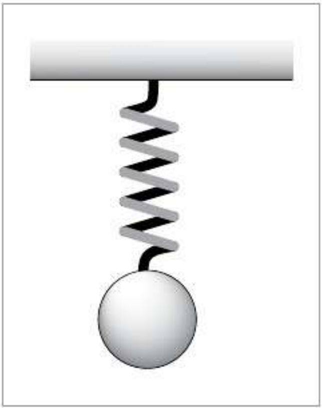
Рассмотрим движение точки с постоянной ненулевой скоростью v по единичной окружности (рис. 25.1). Пусть исходное положение точки задаётся углом α, то есть в начальный момент времени точка имеет координаты $M_0(\cos\alpha; \sin\alpha)$. За время t точка пройдёт по дуге окружности расстояние vt. Из определения радианной меры угла следует, что длина дуги единичной окружности, по которой переместилась точка, равна углу поворота исходной точки M_0. Поэтому через время t положение точки будет определяться углом $vt + \alpha$, а следовательно, точка будет иметь координаты $M(\cos(vt + \alpha); \sin(vt + \alpha))$. Видим, что каждая координата точки, которая движется по окружности, определяет функцию гармонического колебания:

$$x = \cos(vt + \alpha),\ y = \sin(vt + \alpha).$$

На уроках физики вы изучали колебательное движение, в частности движение математического маятника (рис. 25.2). Можно определить, что отклонение маятника от положения равновесия определяется функцией $y = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$, где A – величина отклонения маятника от вертикали в начальный момент времени, g – ускорение свободного падения, l – длина нити маятника, t – время. Таким образом, колебание математического маятника – пример гармонического колебания.

Рис. 25.2





Гармонические колебания также можно наблюдать при колебании гирьки на пружине; слушая музыку, ведь при этом в воздухе образуются звуковые волны; играя на гитаре, поскольку струна принимает форму, близкую к синусоиде; изучая работу электроприборов, так как переменный электрический ток также описывается тригонометрическими функциями, и во многих других случаях.

Если у функции гармонического колебания $y = A\sin(kx + \alpha)$ или $y = A\cos(kx + \alpha)$ числа A и k являются положительными, то число A называют **амплитудой** гармонического колебания, а число k – **циклической частотой** гармонического колебания.

Так как тригонометрические функции $y = A\sin(kx + \alpha)$, $y = A\cos(kx + \alpha)$, где A – положительное число, принимают значения из промежутка $[-A; A]$, то амплитуда гармонического колебания показывает наибольшее значение функции гармонического колебания.

Гармонические колебания играют важную роль при изучении многих процессов. Как правило, функцию сложного периодического процесса стараются представить как сумму нескольких функций гармонического колебания, которые считаются простейшими. Например, функцию, описывающую сложный музыкальный аккорд, можно представить как сумму функций гармонического колебания отдельных нот, составляющих этот аккорд. По этому принципу работают многие технические устройства. Так, некоторые типы радиопередатчиков кодируют информацию в виде отдельных гармонических колебаний, излучая в пространство волну, являющуюся их суммой. В другом месте радиоприёмник выполняет обратные действия – представляет полученный сигнал как сумму отдельных гармонических колебаний, что позволяет воспроизвести переданную информацию.

Раздел математики, изучающий процессы, связанные с гармоническими колебаниями, называют «Гармонический анализ».

Величайший вклад в развитие этого раздела внесли российские математики, представители московской математической школы Н.К. Бари, А.Н. Колмогоров, Д.Е. Меньшов и др. Более подробно о московской математической школе вы сможете прочитать в рассказе после § 41.

Итоги главы 3

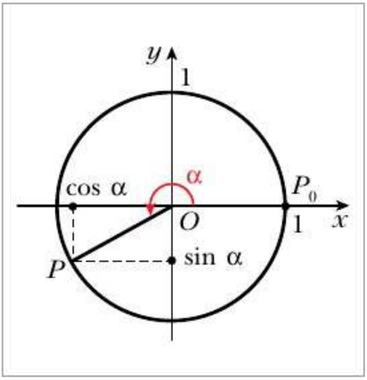
Радианная мера угла

Углом в один радиан называют центральный угол окружности, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

Радианная и градусная меры угла связаны формулами 1 **рад** $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$, $1^\circ = \frac{\neq}{180}$ **рад.**

Косинус, синус, тангенс и котангенс угла поворота

Косинусом и синусом угла поворота α **называют соответственно абсциссу** x **и ординату** y **точки** $P\,(x;\,y)$ **единичной окружности, полученной из точки** $P_0\,(1;\,0)$ **в результате поворота вокруг начала координат на угол** α**.**

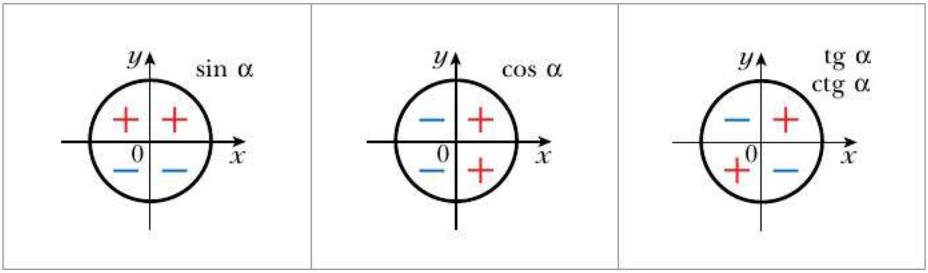


Тангенсом угла поворота α **называют отношение синуса этого угла к его косинусу:**

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Котангенсом угла поворота α **называют отношение косинуса этого угла к его синусу:** $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$**.**

Знаки значений тригонометрических функций



Периодические функции

Функцию f называют периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции f выполняются равенства $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T называют периодом функции f.

Если среди всех периодов функции f существует наименьший положительный период, то его называют главным периодом функции f.

Связь тригонометрических функций одного и того же угла

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad$ $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$
$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$

Формулы приведения

Для того чтобы записать любую из формул приведения, можно руководствоваться такими правилами:

1) в правой части равенства ставят тот знак, который имеет левая часть при $0 < \alpha < \frac{\neq}{2}$;

2) если в левой части формулы угол имеет вид $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус меняют на косинус, тангенс — на котангенс, и наоборот. Если угол имеет вид $\pi \pm \alpha$, то замены функции не происходит.

Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

Формулы половинного угла

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Формулы, выражающие $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

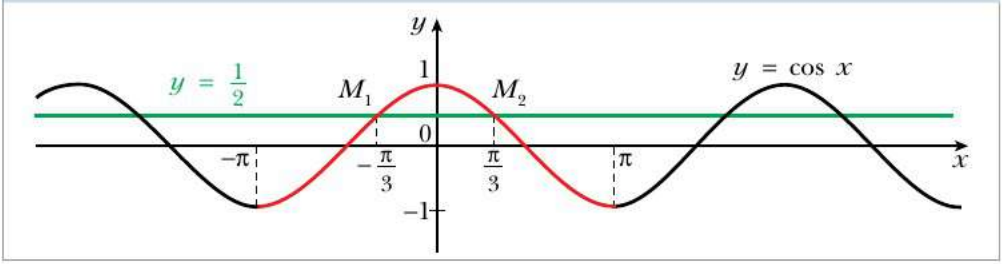
Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Рис. 26.2



этой функции. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает график функции $y = \cos x$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ в двух точках M_1 и M_2, абсциссы которых являются противоположными числами. Следовательно, уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ имеет два корня. Поскольку $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то этими корнями являются числа $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$.

Функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π. Поэтому каждый из остальных корней уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ отличается от одного из найденных корней $-\frac{\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{3}$ на число вида $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

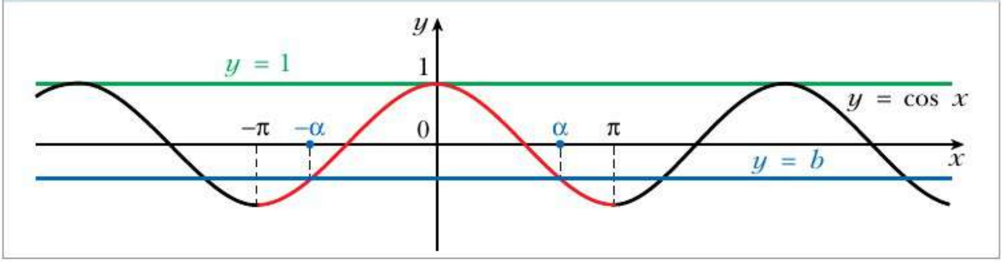
Следовательно, корни рассматриваемого уравнения задаются формулами $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ и $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Как правило, эти две формулы заменяют одной записью:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Вернёмся к уравнению $\cos x = b$, где $|b| \leqslant 1$. На рисунке 26.3 показано, что на промежутке $[-\pi; \pi]$ это уравнение имеет два корня α и $-\alpha$, где $\alpha \in [0; \pi]$ (при $b = 1$ эти корни совпадают и равны нулю).

Рис. 26.3



Тогда все корни уравнения $\cos x = b$ имеют вид

$$x = \pm\alpha + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Эта формула показывает, что корень α играет особую роль: зная его, можно найти все остальные корни уравнения $\cos x = b$. Корень α имеет специальное название – **арккосинус**.

Определение

Арккосинусом числа b, где $|b| \leqslant 1$, называют такое число α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен b.

Для арккосинуса числа b используют обозначение $\arccos b$.
Например,

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ так как } \frac{\pi}{3} \in [0; \pi] \text{ и } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \text{ так как } \frac{3\pi}{4} \in [0; \pi] \text{ и } \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \text{ так как } \frac{\pi}{2} \in [0; \pi] \text{ и } \cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\arccos(-1) = \pi, \text{ так как } \pi \in [0; \pi] \text{ и } \cos\pi = -1.$$

Вообще, $\boldsymbol{\arccos b = \alpha}$**, *если*** $\boldsymbol{\alpha \in [0; \pi]}$ ***и*** $\boldsymbol{\cos\alpha = b}$.

Отметим, что, например, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Однако $\arccos\frac{1}{2} \neq -\frac{\pi}{3}$, так как $-\frac{\pi}{3} \notin [0; \pi]$.

Теперь формулу корней уравнения $\cos x = b$, $|b| \leqslant 1$, можно записать так:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \pm\arccos b + 2\pi n,\ n \in Z}} \qquad (1)$$

Заметим, что частные случаи уравнения $\cos x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) были рассмотрены раньше (см. § 15). Напомним полученные результаты:

$\cos x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = -1$
$x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Такие же результаты можно получить, используя формулу (1).

Пример. Решите уравнение:

1) $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-7x\right)=0$.

Решение. 1) Используя формулу (1), можем записать:

$$4x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Далее получаем: $4x = \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$; $x = \pm\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}$.

Ответ: $\pm\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) Имеем: $\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$$\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ x=\pm\pi-\frac{3\pi}{4}+6\pi n.$$

Ответ: $\pm\pi-\frac{3\pi}{4}+6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3) Перепишем данное уравнение так: $\cos\left(7x-\frac{\pi}{5}\right)=0$. Отсюда

$$7x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Тогда $7x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+\pi n$; $7x=\frac{7\pi}{10}+\pi n$; $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{7}$.

Ответ: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

1. При каких значениях b имеет корни уравнение $\cos x = b$?
2. Сколько корней имеет уравнение $\cos x = b$ при $|b| \leqslant 1$?
3. Что называют арккосинусом числа b?
4. Напишите формулу корней уравнения $\cos x = b$ при $|b| \leqslant 1$.
5. Напишите формулу корней уравнения $\cos x = 1$; $\cos x = 0$; $\cos x = -1$.

Упражнения

26.1. Решите уравнение:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos x = \frac{\pi}{3}$;

2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{1}{3}$; 6) $\cos x = \frac{\pi}{4}$.

26.2. Решите уравнение:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\cos x = \frac{4}{7}$.

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

26.3. Решите уравнение:

1) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos 6x = 1$; 5) $\cos 9x = -\frac{1}{5}$;

2) $\cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$; 6) $\cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

26.4. Решите уравнение:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos \frac{3x}{4} = -1$.

26.5. Решите уравнение:

1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{x}{6} - 2\right) = -1$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) + 1 = 0$.

26.6. Решите уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{9} - 4x\right) = 1$; 2) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + 3\right) + 1 = 0$.

26.7. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

26.8. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

26.9. Сколько корней уравнения $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

26.10. Найдите все корни уравнения $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}$, удовлетворяющие неравенству $-\frac{\pi}{6} < x < 4\pi$.

26.11. При каких значениях a уравнение $\cos 2x = -4a^2 + 4a - 2$ имеет решения?

26.12. При каких значениях a уравнение $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -a^2 - 1$ имеет решения?

Упражнения для повторения

26.13. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$; 2) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{a-b}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}\right)}$.

26.14. Найдите область определения функции:

1) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x^2-5x+2}}$; 2) $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x+2}$; 3) $y=\sqrt{4-2\sqrt{x}}$.

§ 27. Уравнение $\sin x = b$

Поскольку областью значений функции $y = \sin x$ является промежуток $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ уравнение $\sin x = b$ не имеет решений. Вместе с тем при любом b таком, что $|b| \leqslant 1$, это уравнение имеет корни, причём их бесконечно много.

Отметим, что частные случаи уравнения $\sin x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) были рассмотрены раньше (см. § 15). Напомним полученные результаты:

$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Для того чтобы получить общую формулу корней уравнения $\sin x = b$, где $|b| \leqslant 1$, обратимся к графической интерпретации.

На рисунке 27.1 изображены графики функций $y = \sin x$ и $y = b$, $|b| \leqslant 1$.

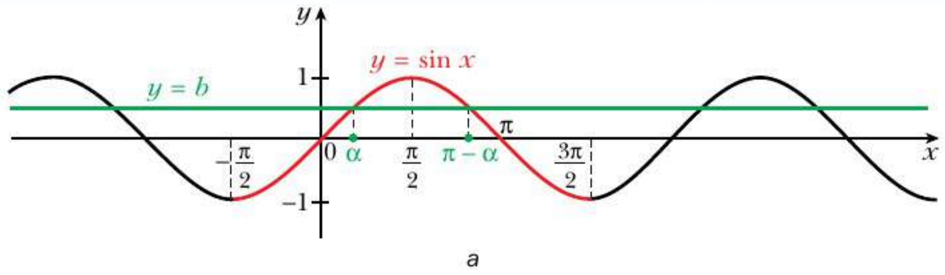
Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ (красная линия на рисунке 27.1), то есть на промежутке, длина которого равна периоду этой функции. На этом промежутке уравнение $\sin x = b$ имеет два корня α и $\pi - \alpha$, где $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\left(\text{при } b = 1 \text{ эти корни совпадают и равны } \dfrac{\pi}{2}\right)$.

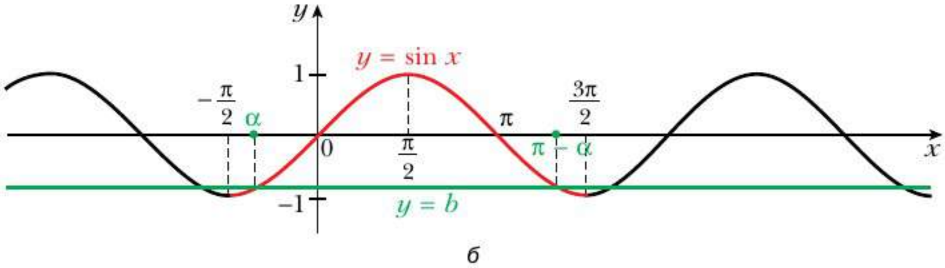
Поскольку функция $y = \sin x$ периодическая с периодом 2π, то каждый из остальных корней уравнения $\sin x = b$ отличается от одного из найденных корней на число вида $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Тогда корни уравнения $\sin x = b$ задаются формулами

$$x = \alpha + 2\pi n \text{ и } x = \pi - \alpha + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Рис. 27.1





Эти две формулы можно заменить одной записью:

$$x = (-1)^k\alpha + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

Действительно, если k – чётное число, то есть $k = 2n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то получаем: $x = \alpha + 2\pi n$; если k – нечётное число, то есть $k = 2n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то получаем: $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$.

Формула (1) показывает, что корень α играет особую роль: зная его, можно найти все остальные корни уравнения $\sin x = b$. Корень α имеет специальное название – **арксинус**.

Определение

Арксинусом числа b, где $|b| \leqslant 1$, называют такое число α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен b.

Для арксинуса числа b используют обозначение $\arcsin b$.

Например,

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ так как } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \text{ так как } -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arcsin 0 = 0, \text{ так как } 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin 0 = 0;$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \text{ так как } -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Вообще, **$\arcsin b = \alpha$, *если*** $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ***и* $\sin\alpha = b$**.

Отметим, что, например, $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Однако $\arcsin\frac{1}{2} \uparrow \frac{5\pi}{6}$, так как $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь формулу корней уравнения $\sin x = b$, $|b| \leqslant 1$, можно записать так:

$$\boxed{\boldsymbol{x = (-1)^k \arcsin b + \pi k, \; k \in Z}} \qquad (2)$$

<u>**Пример 1.**</u> Решите уравнение:

1) $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin\left(t + \frac{\pi}{10}\right) = -1$.

Решение. 1) Используя формулу (2), можно записать:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \; n \in \boldsymbol{Z}.$$

Далее получаем:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n; \; \frac{x}{2} = -(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; \; \frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\neq}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\neq}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) Перепишем данное уравнение так: $-\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогда $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, \; n \in \boldsymbol{Z};$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n; \; 3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n; \; x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3) По формуле корней уравнения $\sin x = -1$ можно записать:

$$t + \frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Далее имеем: $t = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n;\ t = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi n.$

Ответ: $-\frac{3\pi}{5} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◄

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2.$
Решение. Перепишем данное уравнение так:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1.$$

Поскольку $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, а $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, то можно записать:

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x = 1.$$

Используя формулу синуса суммы $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$, получим:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1.$$

Отсюда $\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◄

Заметим, что при решении уравнения примера 2 можно было воспользоваться и формулой косинуса разности $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$. Действительно, поскольку $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x = 1;\ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Отсюда получаем тот же ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

1. При каких значениях b имеет корни уравнение $\sin x = b$?
2. Сколько корней имеет уравнение $\sin x = b$ при $|b| \leqslant 1$?
3. Что называют арксинусом числа b?
4. Напишите формулу корней уравнения $\sin x = b$ при $|b| \leqslant 1.$
5. Напишите формулу корней уравнения $\sin x = 1;\ \sin x = 0;\ \sin x = -1.$

Упражнения

27.1. Решите уравнение:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{1}{4}$; 4) $\sin x = \sqrt{2}$.

27.2. Решите уравнение:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\sin x = 1{,}5$.

27.3. Решите уравнение:

1) $\sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 5x = 1$; 3) $\sin(-8x) = \frac{2}{9}$.

27.4. Решите уравнение:

1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\frac{x}{7} = 0$; 3) $\sin\frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

27.5. Решите уравнение:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin\left(\frac{x}{3} + 1\right) = -1$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) - 1 = 0$.

27.6. Решите уравнение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{18} - 8x\right) = 1$; 2) $2\sin\left(\frac{x}{5} - 4\right) + 1 = 0$.

27.7. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

27.8. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\left(3x - \frac{\pi}{15}\right) = -1$.

27.9. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$; 3) $3\sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 3$.

2) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 1$;

27.10. Решите уравнение:

1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$; 2) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

27.11. Найдите все корни уравнения $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

27.12. Сколько корней уравнения $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ принадлежат промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

27.13. При каких значениях a имеет решения уравнение $(a^2 - 1)\sin x = a + 1$?

27.14. При каких значениях a имеет решения уравнение $(a + 4)\sin^2 2x = a^2 - 16$?

Упражнения для повторения

27.15. Решите уравнение:

1) $x - \sqrt{x - 1} = 3$;

2) $\sqrt{1 + 4x - x^2} + 1 = x$;

3) $\sqrt{3x + 4} \cdot \sqrt{2x - 5} = 2x + 1$;

4) $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{5 + x}} = \sqrt{5 + x}$.

27.16. Постройте график функции, укажите её область значений и промежутки возрастания и убывания:

1) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 4x - x^2, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, \text{ если } x < -2, \\ -x, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt[4]{x}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

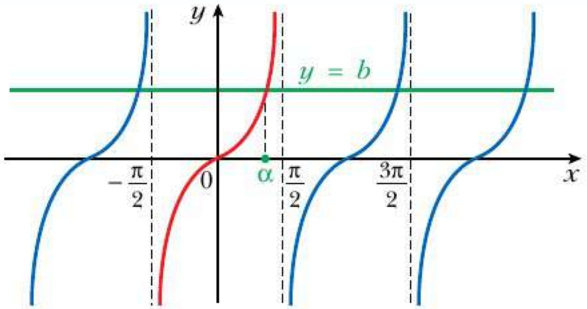
§ 28. Уравнения $\operatorname{tg} x = b$ и $\operatorname{ctg} x = b$

Поскольку областью значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$, то уравнение $\operatorname{tg} x = b$ имеет решения при любом значении b.

Для того чтобы получить формулу корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$, обратимся к графической интерпретации.

На рисунке 28.1 изображены графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = b$.

Рис. 28.1



Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (красная кривая на рисунке 28.1), то есть на промежутке, длина которого равна периоду этой функции. На этом промежутке уравнение $\operatorname{tg} x = b$ при любом b имеет единственный корень α.

Поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ является периодической с периодом π, то каждый из остальных корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$ отличается от найденного корня на число вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Тогда корни уравнения $\operatorname{tg} x = b$ задаются формулой

$$x = \alpha + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Полученная формула показывает, что корень α играет особую роль: зная его, можно найти все остальные корни уравнения $\operatorname{tg} x = b$. Корень α имеет специальное название — **арктангенс**.

Определение

Арктангенсом числа b называют такое число α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен b.

Для арктангенса числа b используют обозначение $\operatorname{arctg} b$.

Например,

$$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \text{ так как } \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \text{ так как } -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \text{ так как } 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{tg} 0 = 0.$$

Вообще, $\boldsymbol{\operatorname{arctg} b = \alpha}$, ***если*** $\boldsymbol{\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}$ ***и*** $\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = b}$.

Отметим, что, например, $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$. Однако $\operatorname{arctg} 1 \neq -\frac{3\pi}{4}$, так как $-\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Теперь формулу корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$ можно записать так:

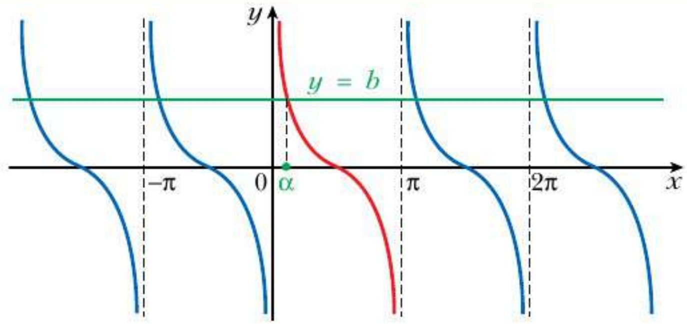
$$\boxed{\boldsymbol{x = \operatorname{arctg} b + \pi n,\ n \in Z}}$$

Поскольку областью значений функции $y = \operatorname{ctg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$, то уравнение $\operatorname{ctg} x = b$ имеет решения при любом значении b.

На рисунке 28.2 изображены графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = b$.

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ (красная кривая на рисунке 28.2), то есть на промежутке, длина которого равна периоду этой функции. На этом промежутке уравнение $\operatorname{ctg} x = b$ при любом b имеет единственный корень α.

Рис. 28.2



Поскольку функция $y = \operatorname{ctg} x$ является периодической с периодом π, то каждый из остальных корней уравнения $\operatorname{ctg} x = b$ отличается от найденного корня на число вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Тогда корни уравнения $\operatorname{ctg} x = b$ задаются формулой

$$x = \alpha + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Корень α имеет специальное название – **арккотангенс**.

Определение

Арккотангенсом числа b называют такое число α из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен b.

Для арккотангенса числа b используют обозначение $\operatorname{arcctg} b$.

Например,

$$\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3},\ \text{так как}\ \frac{\pi}{3} \in (0; \pi)\ \text{и}\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6},\ \text{так как}\ \frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)\ \text{и}\ \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3};$$

$$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2},\ \text{так как}\ \frac{\pi}{2} \in (0; \pi)\ \text{и}\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0.$$

Вообще, $\boldsymbol{\operatorname{arcctg} b = \alpha}$, ***если*** $\boldsymbol{\alpha \in (0; \pi)}$ ***и*** $\boldsymbol{\operatorname{ctg}\alpha = b}$.

Отметим, что, например, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Однако $\operatorname{arcctg}(-1) \neq -\frac{\pi}{4}$, так как $-\frac{\pi}{4} \notin (0; \pi)$.

Теперь формулу корней уравнения $\operatorname{ctg} x = b$ можно записать так:

$$\boldsymbol{x = \operatorname{arcctg} b + \pi n,\ n \in Z}$$

Пример. Решите уравнение: 1) $\operatorname{tg}\frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = -1$.

Решение. 1) Имеем: $\frac{2x}{3} = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}$;

$$\frac{2}{3}x = -\frac{\pi}{3} + \pi k;\ \ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Имеем: $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$;

$$x - \frac{2\pi}{3} = \operatorname{arcctg} 1 + \pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z};$$

$$x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi k;\ \ x = \frac{11}{12}\pi + \pi k.$$

Ответ: $\frac{11}{12}\pi + \pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}$. ◄

1. При каких значениях b имеет корни уравнение $\operatorname{tg} x = b$? $\operatorname{ctg} x = b$?
2. Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} x = b$? $\operatorname{ctg} x = b$?
3. Что называют арктангенсом числа b? арккотангенсом числа b?
4. Напишите формулу корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$; $\operatorname{ctg} x = b$.

Упражнения

28.1. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;
2) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
3) $\operatorname{tg} x = -1$;
4) $\operatorname{tg} x = 5$;
5) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
6) $\operatorname{ctg} x = -1$;
7) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$;
8) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{7}$;
9) $\operatorname{ctg} x = 0$.

28.2. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg} x = 1$;
2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;
4) $\operatorname{tg} x = -2$;
5) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;
6) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
7) $\operatorname{tg} x = 0$.

28.3. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$;
2) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$;
3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right) = \sqrt{3}$;
4) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0$;
5) $\operatorname{ctg} 6x = \frac{6}{11}$;
6) $\operatorname{ctg}(-9x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

28.4. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg} \frac{3}{5}x = 0$;
2) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$;
3) $\operatorname{ctg} \frac{3}{2}x = 5$.

28.5. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
2) $\operatorname{tg}(3 - 2x) = 2$;
3) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$;
4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

28.6. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;
2) $\operatorname{ctg}(4 - 3x) = 2$;
3) $3\operatorname{tg}(3x + 1) - \sqrt{3} = 0$.

28.7. Сколько корней уравнения $\operatorname{tg} 4x = 1$ принадлежат промежутку $[0; \pi]$?

28.8. Сколько корней уравнения $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

28.9. Найдите сумму корней уравнения $\operatorname{ctg} 2x = -\sqrt{3}$, принадлежащих промежутку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

28.10. Найдите сумму корней уравнения $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$, принадлежащих промежутку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Упражнения для повторения

28.11. Графики каких из данных функций симметричны относительно оси ординат:

1) $f(x) = \frac{4 - x^2}{\cos 2x}$;
2) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$;
3) $f(x) = \sqrt[4]{2 - x} + \sqrt[4]{2 + x}$;
4) $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$?

28.12. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $f(x) = x^2 + 4$, $x \in [0; +\infty)$;

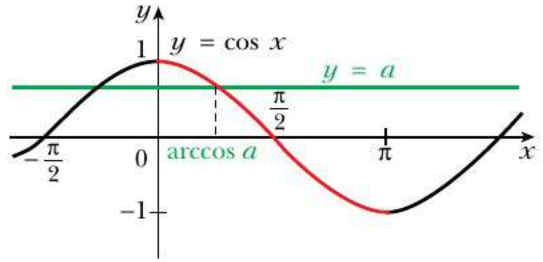
2) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in (-\infty; 0]$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in (-\infty; 0]$.

§ 29. Функции $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$

Для любого $a \in [-1; 1]$ уравнение $\cos x = a$ на промежутке $[0; \pi]$ имеет единственный корень, равный $\arccos a$ (рис. 29.1). Поэтому каждому числу x из промежутка $[-1; 1]$ можно поставить в соответствие единственное число y из промежутка $[0; \pi]$ такое, что $y = \arccos x$.

Рис. 29.1



Указанное правило задаёт функцию $f(x) = \arccos x$ с областью определения $D(f) = [-1; 1]$ и областью значений $E(f) = [0; \pi]$.

Функция f является обратной к функции $g(x) = \cos x$ с областью определения $D(g) = [0; \pi]$.

Действительно, $D(f) = E(g) = [-1; 1]$;

$$E(f) = D(g) = [0; \pi].$$

Из определения арккосинуса следует, что для всех x из промежутка $[-1; 1]$ выполняется равенство

$$\boxed{\cos(\arccos x) = x}$$

Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$.

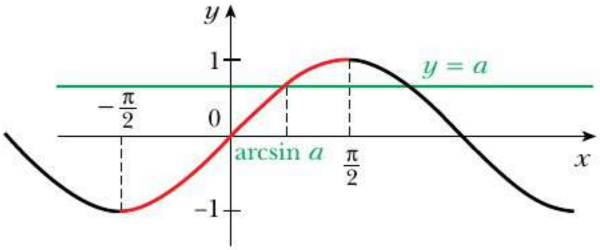
Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Это позволяет построить график функции $f(x) = \arccos x$ (рис. 29.2).

Установим некоторые свойства функции $f(x) = \arccos x$.

Для любого $a \in [-1; 1]$ уравнение $\sin x = a$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет единственный корень, равный $\arcsin a$ (рис. 29.4). Поэтому каждому числу x из промежутка $[-1; 1]$ можно поставить в соответствие единственное число y из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ такое, что $y = \arcsin x$.

Рис. 29.4



Указанное правило задаёт функцию $f(x) = \arcsin x$ с областью определения $D(f) = [-1; 1]$ и областью значений $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функция f является обратной к функции $g(x) = \sin x$ с областью определения $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Действительно, $D(f) = E(g) = [-1; 1]$;

$$E(f) = D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Из определения арксинуса следует, что для всех $x \in [-1; 1]$ выполняется равенство

$$\boxed{\sin(\arcsin x) = x}$$

Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$.

Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

Вновь воспользуемся тем, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

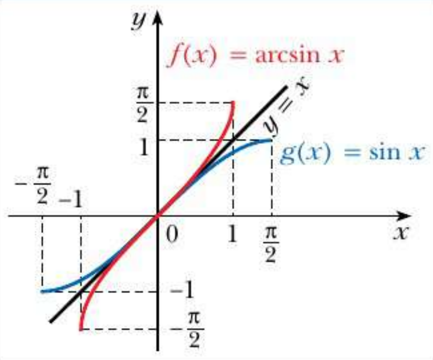
На рисунке 29.5 показано, как с помощью графика функции $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, построить график функции $f(x) = \arcsin x$.

Установим некоторые свойства функции $f(x) = \arcsin x$.

Поскольку функция $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, нечётная, то обратная ей функция $f(x) = \arcsin x$ также является нечётной (см. задачу 3.13). Иными словами, для любого $x \in [-1; 1]$ выполняется равенство

$$\mathbf{arcsin}\,(-x) = -\mathbf{arcsin}\,x$$

Рис. 29.5



Например, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

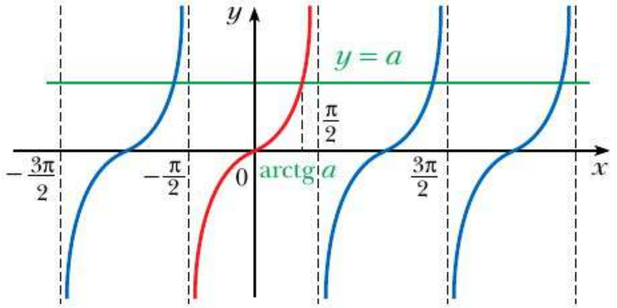
Функция $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, возрастающая. Следовательно, функция $f(x) = \arcsin x$ также является возрастающей (см. теорему 3.3).

Функция f имеет единственный нуль $x = 0$.

Если $x \in [-1; 0)$, то $f(x) < 0$; если $x \in (0; 1]$, то $f(x) > 0$. Следовательно, промежутки $[-1; 0)$ и $(0; 1]$ являются промежутками знакопостоянства функции f.

Для любого a уравнение $\operatorname{tg} x = a$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеет единственный корень, равный $\operatorname{arctg} a$ (рис. 29.6). Поэтому любому числу x можно поставить в соответствие единственное число y из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ такое, что $y = \operatorname{arctg} x$.

Рис. 29.6



Указанное правило задаёт функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ с областью определения $D(f) = \boldsymbol{R}$ и областью значений $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функция f является обратной к функции $g(x) = \operatorname{tg} x$ с областью определения $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Действительно, $D(f) = E(g) = \boldsymbol{R}$;

$$E(f) = D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Из определения арктангенса следует, что для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

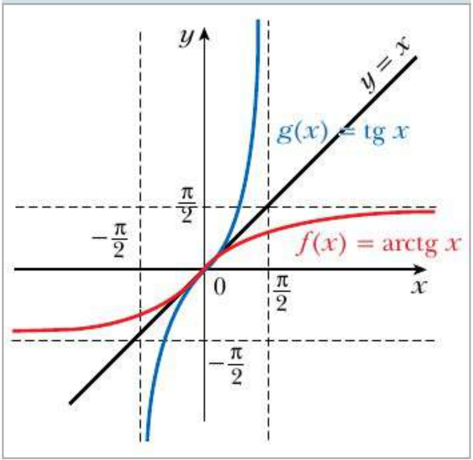
$$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x}$$

Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$.

Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

На рисунке 29.7 показано, как с помощью графика функции $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, построить график функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Рис. 29.7



Установим некоторые свойства функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Поскольку функция $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, нечётная, то обратная функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ также является нечётной. Иными словами, для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x}$$

Например, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

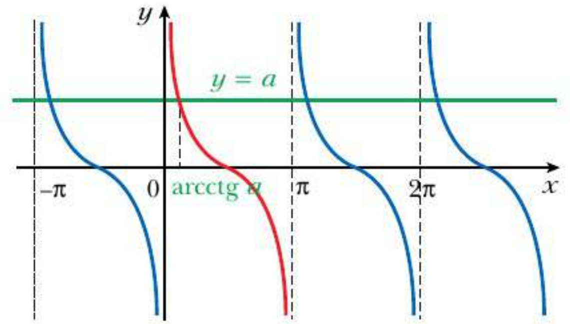
Функция $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, возрастающая. Следовательно, функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ также является возрастающей.

Функция f имеет единственный нуль $x = 0$.

Если $x \in (-\infty; 0)$, то $f(x) < 0$; если $x \in (0; +\infty)$, то $f(x) > 0$. Следовательно, промежутки $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ являются промежутками знакопостоянства функции f.

Для любого a уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ на промежутке $(0; \pi)$ имеет единственный корень, равный $\operatorname{arcctg} a$ (рис. 29.8). Поэтому любому числу x можно поставить в соответствие единственное число y из промежутка $(0; \pi)$ такое, что $y = \operatorname{arcctg} x$.

Рис. 29.8



Указанное правило задаёт функцию $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ с областью определения $D(f) = \boldsymbol{R}$ и областью значений $E(f) = (0; \pi)$.

Функция f является обратной к функции $g(x) = \operatorname{ctg} x$ с областью определения $D(g) = (0; \pi)$.

Действительно, $D(f) = E(g) = \boldsymbol{R}$;

$$E(f) = D(g) = (0; \pi).$$

Из определения арккотангенса следует, что для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

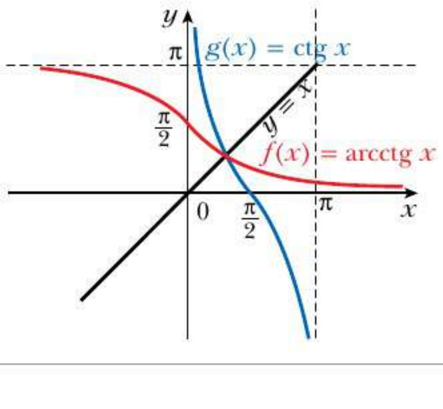
$$\boxed{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x}$$

Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$.

Сказанное означает, что f и g – взаимно обратные функции.

На рисунке 29.9 показано, как с помощью графика функции $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $D(g) = (0; \pi)$, построить график функции $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

Рис. 29.9



Установим некоторые свойства функции $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

Поскольку функция $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $D(g) = (0; \pi)$, убывающая, то обратная ей функция $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ также является убывающей.

Функция f нулей не имеет.

Поскольку областью значений функции f является промежуток $(0; \pi)$, то $f(x) > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, промежуток $(-\infty; +\infty)$ является промежутком знакопостоянства функции f.

Отметим важное свойство функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x}$$

Например, $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Докажем это свойство.

Пусть $\operatorname{arcctg}(-x) = \alpha_1$ и $\pi - \operatorname{arcctg} x = \alpha_2$. Заметим, что $\alpha_1 \in (0; \pi)$, $\alpha_2 \in (0; \pi)$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутке $(0; \pi)$, следовательно, на этом промежутке каждое своё значение она принимает только один раз. Поэтому, показав, что $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}\alpha_2$, тем самым докажем равенство $\alpha_1 = \alpha_2$.

Имеем: $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-x)) = -x$;

$\operatorname{ctg}\alpha_2 = \operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arcctg} x) = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = -x$.

Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}\alpha_2$.

В таблице приведены свойства обратных тригонометрических функций.

Свойства	$y = \arccos x$	$y = \arcsin x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область определения	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
Область значений	$[0; \pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Нули функции	$x = 1$	$x = 0$	$x = 0$	—
Промежутки знако-постоянства	Если $x \in [-1; 1)$, то $\arccos x > 0$	Если $x \in [-1; 0)$, то $\arcsin x < 0$; если $x \in (0; 1]$, то $\arcsin x > 0$	Если $x \in (-\infty; 0)$, то $\operatorname{arctg} x < 0$; если $x \in (0; +\infty)$, то $\operatorname{arctg} x > 0$	$\operatorname{arcctg} x > 0$ при всех x

Свойства	$y = \arccos x$	$y = \arcsin x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Чётность	Не является ни чётной, ни нечётной	Нечётная	Нечётная	Не является ни чётной, ни нечётной
Возрастание/убывание	Убывающая	Возрастающая	Возрастающая	Убывающая

Пример 1. Вычислите $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Решение. Используя формулу $\sin(\arcsin x) = x$ при $|x| \leqslant 1$, получаем: $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$. ◄

Пример 2. Найдите область определения функции $y = \arccos(x^2 - 3)$.

Решение. Областью определения $D(y)$ данной функции является множество решений неравенства $-1 \leqslant x^2 - 3 \leqslant 1$.

Имеем: $2 \leqslant x^2 \leqslant 4$. Отсюда

$$\begin{cases} x^2 \leqslant 4, \\ x^2 \geqslant 2; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -\sqrt{2}, \\ x \geqslant \sqrt{2}; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x \leqslant -\sqrt{2}, \\ \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2. \end{array}\right.$$

Следовательно, $D(y) = \left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$. ◄

Пример 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4 - \arccos 3x$.

Решение. Поскольку $0 \leqslant \arccos 3x \leqslant \pi$, то $-\pi \leqslant -\arccos 3x \leqslant 0$. Отсюда $4 - \pi \leqslant 4 - \arccos 3x \leqslant 4$.

Отметим, что $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 4 - \pi$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 4$. Следовательно, $\min\limits_{D(f)} f(x) = 4 - \pi$, $\max\limits_{D(f)} f(x) = 4$. ◄

Пример 4. Вычислите: 1) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; 2) $\sin(\operatorname{arcctg}(-3))$.

Решение. 1) Пусть $\arccos\frac{3}{5} = \alpha$. Тогда $\alpha \in [0; \pi]$ и $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Задача свелась к поиску значения $\sin\alpha$.

Если $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin\alpha \geqslant 0$. Тогда получаем:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$.

2) Пусть $\operatorname{arcctg}(-3) = \alpha$. Тогда $\alpha \in (0; \pi)$ и $\operatorname{ctg}\alpha = -3$.

Поскольку $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, то $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10}$. Учитывая, что $\alpha \in (0; \pi)$, получаем: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$. ◄

1. Какова область определения функции $y = \arccos x$? $y = \arcsin x$? $y = \operatorname{arctg} x$? $y = \operatorname{arcctg} x$?
2. Какова область значений функции $y = \arccos x$? $y = \arcsin x$? $y = \operatorname{arctg} x$? $y = \operatorname{arcctg} x$?
3. Какое число является нулём функции $y = \arccos x$? $y = \arcsin x$? $y = \operatorname{arctg} x$? $y = \operatorname{arcctg} x$?
4. Назовите промежутки знакопостоянства функции $y = \arccos x$; $y = \arcsin x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$.
5. Возрастающей или убывающей является функция $y = \arccos x$? $y = \arcsin x$? $y = \operatorname{arctg} x$? $y = \operatorname{arcctg} x$?
6. Чему равен $\arccos(-x)$? $\arcsin(-x)$? $\operatorname{arctg}(-x)$? $\operatorname{arcctg}(-x)$?

Упражнения

29.1. Верно ли равенство:

1) $\arcsin 0 = \pi$;
2) $\arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2}$;
3) $\arcsin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$;
5) $\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$;
6) $\arccos\frac{\pi}{2} = 0$;
7) $\arccos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;
8) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi$;
9) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{12}$;
10) $\operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$;
11) $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
12) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}(-1) = \frac{\pi}{12}$?

29.2. Верно ли равенство:

1) $\arcsin \pi = 0$;

2) $\arcsin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

3) $\arcsin 1 + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$;

4) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$;

5) $\arcsin 1 \cdot \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{12}$;

6) $\arccos 0 = -\frac{\pi}{2}$;

7) $\arccos 1 = 2\pi$;

8) $\arccos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$;

9) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$;

10) $\arccos^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{25\pi^2}{36}$;

11) $\operatorname{arcctg} \frac{\pi}{2} = 0$;

12) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{2}$?

29.3. Вычислите:

1) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

2) $\cos(2\operatorname{arctg} 1)$;

3) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$;

5) $\sin\left(3\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

6) $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\operatorname{arctg} 1\right)$.

29.4. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}(\arccos 1)$;

2) $\sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$;

3) $\cos\left(2\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

5) $\operatorname{tg}(2\arccos(-1))$;

6) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right)$.

29.5. Вычислите:

1) $\cos\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$;

2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4)$;

3) $\cos\left(\arccos \frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}\right)$.

29.6. Вычислите:

1) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{4}\right)$;

2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)$;

3) $\sin\left(\arcsin \frac{\pi}{6}\right)$;

4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \pi)$.

29.7. Найдите область определения функции:

1) $y = \arccos(x^2 - 10)$;
2) $y = \arcsin\dfrac{1}{2x}$;
3) $y = \operatorname{arctg}(4 - x)$;
4) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{x+5}$;
5) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x+2}$;
6) $y = \arcsin\dfrac{1}{x} + \operatorname{arcctg}\sqrt{x-1}$.

29.8. Найдите область определения функции:

1) $y = \arccos(x + 2)$;
2) $y = \arcsin\sqrt{x}$;
3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x-3}$;
4) $y = \operatorname{arcctg}(5 - x)$;
5) $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{\pi}{x+7}$;
6) $y = \arcsin(x-1) + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

29.9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \arcsin x + \dfrac{\pi}{2}$;
2) $y = \arccos x + 2$;
3) $y = 2\arcsin x - \dfrac{\pi}{3}$;
4) $y = \dfrac{1}{\arccos x}$.

29.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \arccos x + \pi$;
2) $y = \arcsin x - 2$;
3) $y = 3\arccos x + \dfrac{\pi}{6}$.

29.11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \arccos\sqrt{x} + 2$;
2) $y = \sqrt{\arcsin x}$.

29.12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \arcsin\sqrt{x} + 4$;
2) $y = \sqrt{\arccos x}$.

29.13. Вычислите:

1) $\cos\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$;
2) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{1}{4}\right)$.

29.14. Вычислите:

1) $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{3}\right)$;
2) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\dfrac{12}{13}\right)$.

Упражнения для повторения

29.15. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $x^6 - 3x^3 - 10 = 0$;
2) $\sqrt{x+4} + 3\sqrt[4]{x+4} = 28$;
3) $\dfrac{2x+1}{x} + \dfrac{4x}{2x+1} = 5$;
4) $x^2 + x - \sqrt{x^2 + x - 2} = 8$.

29.16. Даны функции $f(x) = x^{16}$ и $g(x) = x^{17}$. Расположите в порядке возрастания числа: $f(-5)$, $f(2)$, $g(1)$ и $g(-1)$.

§ 30. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим

В § 26–28 мы получили формулы для решения уравнений вида $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Эти уравнения называют **простейшими тригонометрическими уравнениями**. С помощью различных приёмов и методов многие тригонометрические уравнения можно свести к простейшим.

Сначала рассмотрим тригонометрические уравнения, которые сводятся к простейшим с помощью введения новой переменной.

Пример 1. Решите уравнение $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

Решение. Выполним замену $\cos x = t$. Тогда данное уравнение принимает вид $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Отсюда $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 2$. Поскольку $|\cos x| \leqslant 1$, то уравнение $\cos x = 2$ не имеет корней. Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $\cos x = \frac{1}{2}$. Имеем: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

Пример 2. Решите уравнение $\sin x - 3\cos 2x = 2$.

Решение. Используя формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, преобразуем данное уравнение:

$$\sin x - 3(1 - 2\sin^2 x) - 2 = 0;$$
$$6\sin^2 x + \sin x - 5 = 0.$$

Пусть $\sin x = t$. Получаем квадратное уравнение $6t^2 + t - 5 = 0$. Отсюда $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{5}{6}$.

Следовательно, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = -1,\\ \sin x = \frac{5}{6}.\end{array}\right.$$

Имеем: $\left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\\ x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

<u>Пример 3.</u> Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3.$

Решение. Поскольку $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, то данное уравнение можно записать так:

$$\operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 3.$$

Отсюда $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. Пусть $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $t^2 + t - 2 = 0$. Отсюда $t_1 = 1,\ t_2 = -2.$

Получаем, что данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1,\\ \operatorname{tg} x = -2.\end{array}\right.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\\ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◄

Определение

Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = 0$, где числа a и b одновременно не равны нулю, называют однородным тригонометрическим уравнением первой степени; уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$, где числа a, b и c одновременно не равны нулю, называют однородным тригонометрическим уравнением второй степени.

Например, уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$ — однородное тригонометрическое уравнение первой степени, а уравнения $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ и $2\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ — однородные тригонометрические уравнения второй степени.

Для однородных уравнений существует эффективный метод решения. Ознакомимся с ним на примерах.

<u>Пример 4.</u> Решите уравнение $\sin x - 2\cos x = 0$.

Решение. Если $\cos x = 0$, то из данного уравнения следует, что $\sin x = 0$. Но $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно быть равными нулю, поскольку имеет место равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, множество корней данного уравнения состоит из таких чисел x, при которых $\cos x \neq 0$.

Разделив обе части уравнения $\sin x - 2\cos x = 0$ на $\cos x$, получаем уравнение $\operatorname{tg} x - 2 = 0$, равносильное данному.

Отсюда $\operatorname{tg} x = 2$; $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

<u>**Пример 5.**</u> Решите уравнение $7\sin^2 x - 8\sin x \cos x - 15\cos^2 x = 0$.

Решение. Если $\cos x = 0$, то из данного уравнения следует, что $\sin x = 0$. Однако $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно быть равными нулю. Следовательно, множество корней данного уравнения состоит из таких чисел x, при которых $\cos x \neq 0$.

Разделив обе части данного уравнения на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение:

$$\frac{7\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{8\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{15\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0. \text{ Отсюда}$$

$$7\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x - 15 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{15}{7}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \operatorname{arctg}\frac{15}{7} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{15}{7} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

<u>**Пример 6.**</u> Решите уравнение $3\sin^2 x + \sin 2x = 2$.

Решение. Это уравнение не является однородным. Но его можно привести к однородному:

$$3\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0.$$

Получили однородное уравнение. Далее, действуя, как в предыдущем примере, получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(-1 \pm \sqrt{3}\right) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

<u>**Пример 7.**</u> Решите уравнение $2\sin x - 3\cos x = 2$.

Решение. Воспользуемся формулами двойного аргумента и основным тригонометрическим тождеством:

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 2\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Отсюда $\sin^2\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 5\cos^2\frac{x}{2} = 0$.

Разделим обе части последнего уравнения на $\cos^2\frac{x}{2}$ и выполним замену $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Получаем: $t^2+4t-5=0$, отсюда $t_1=1$, $t_2=-5$.

Исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1,\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=-5.\end{array}\right. \quad \text{Отсюда} \quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\\ x=-2\operatorname{arctg}5+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -2\operatorname{arctg}5+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. ◄

1. Какие уравнения называют простейшими тригонометрическими уравнениями?
2. Какие уравнения называют однородными тригонометрическими уравнениями первой степени? Второй степени?

Упражнения

30.1. Решите уравнение:

1) $2\sin^2 x+\sin x-1=0$;
2) $2\cos^2 x-5\cos x-3=0$;
3) $\sin^2 3x+2\sin 3x-3=0$;
4) $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x-3=0$;
5) $3\operatorname{ctg}^2 2x+\operatorname{ctg}2x-4=0$;
6) $3\cos^2\frac{x}{4}+5\cos\frac{x}{4}-2=0$.

30.2. Решите уравнение:

1) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$;
2) $2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0$;
3) $4\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x-3=0$;
4) $3\operatorname{ctg}^2\frac{x}{3}-\operatorname{ctg}\frac{x}{3}-2=0$.

30.3. Решите уравнение:

1) $\sin x-\cos x=0$;
2) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$;
3) $3\sin x=2\cos x$;
4) $4\cos 2x-\sin 2x=0$;
5) $\sin\frac{x}{3}+5\cos\frac{x}{3}=0$;
6) $\sin^2 x-5\sin x\cos x+4\cos^2 x=0$;
7) $\sin^2\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=0$;
8) $3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

30.4. Решите уравнение:

1) $\sin x+\cos x=0$;
2) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$;
3) $2\sin x+\cos x=0$;
4) $\cos 4x-3\sin 4x=0$;
5) $\sin^2 x-5\sin x\cos x+6\cos^2 x=0$;
6) $4\sin^2 x=3\sin x\cos x+\cos^2 x$.

30.5. Решите уравнение:

1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0;$
2) $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0;$
3) $\cos 2x = 1 + 4\cos x;$
4) $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0;$
5) $\cos 2x + \sin x = 0;$
6) $\cos\frac{2x}{3} - 5\cos\frac{x}{3} - 2 = 0;$
7) $\cos 2x - \cos^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0;$
8) $\cos\frac{x}{2} + \cos x = 0;$
9) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2;$
10) $8\sin^2 3x + 4\sin^2 6x = 5;$
11) $4\operatorname{tg} 5x + 3\operatorname{ctg} 5x = 7;$
12) $\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3;$
13) $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7;$
14) $\cos 2x - 4\sqrt{2}\cos x + 4 = 0.$

30.6. Решите уравнение:

1) $4\sin^2 x + 8\cos x + 1 = 0;$
2) $2\cos^2 x = 1 + \sin x;$
3) $\cos 2x + 8\sin x = 3;$
4) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x;$
5) $5\sin\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{3} + 3 = 0;$
6) $\cos x + \sin\frac{x}{2} = 0;$
7) $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0;$
8) $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3;$
9) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = \frac{3}{\cos^2 x};$
10) $4\sin^2 x + 9\operatorname{ctg}^2 x = 6.$

30.7. Решите уравнение:

1) $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x - 2\cos^2 x = 0;$
2) $\cos^2 5x + 7\sin^2 5x = 4\sin 10x;$
3) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 - \cos 2x;$
4) $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 14\cos^2 x - 2 = 0;$
5) $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2;$
6) $3\sin^2 x + \sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3;$
7) $3\sin x\cos x + \cos^2 x = 1;$
8) $\frac{2\cos x + \sin x}{7\sin x - \cos x} = \frac{1}{2}.$

30.8. Решите уравнение:

1) $\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2\sin 2x = 0;$
2) $5\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1;$
3) $6\sin^2 x + 2\sin 2x + 4\cos^2 x = 3;$
4) $2\cos^2 x + \sin 2x - 2 = 0;$
5) $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2;$
6) $\frac{2\sin x - \cos x}{5\sin x - 4\cos x} = \frac{1}{3}.$

30.9. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0.$

30.10. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x = 1$.

30.11. Найдите наименьший положительный корень уравнения $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

30.12. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

30.13. Решите уравнение:

1) $4\cos x \sin x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
2) $3\cos x + 2\operatorname{tg} x = 0$;
3) $8\sin^2 x + 4\sin^2 2x + 8\cos 2x = 5$;
4) $3 + 5\cos x = \sin^4 x - \cos^4 x$;
5) $\cos 2x - 9\cos x + 6 = 4\sin^2 \frac{x}{2}$.

30.14. Решите уравнение:

1) $4\operatorname{ctg} x - 5\sin x = 0$;
2) $4\sin^2 2x + 7\cos 2x - 2\sin^2 x = 6$;
3) $7 + 2\sin 2x + 1{,}5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$;
4) $\sin^2 x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$;
5) $2\cos 4x - 2\cos^2 x = 3\cos 2x$.

30.15. Решите уравнение:

1) $3\sin x - 8\cos x = 3$; 2) $2\sin x - 5\cos x = 3$.

30.16. Решите уравнение:

1) $3\sin x + 5\cos x = -3$; 2) $3\sqrt{3}\sin x - 5\cos x = 7$.

30.17. Сколько корней уравнения $\cos 2x + \sin x = \cos^2 x$ принадлежат промежутку $[-\pi; \pi]$?

30.18. Найдите сумму корней уравнения $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0$, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

30.19. Найдите все корни уравнения $2\cos^2 x = \sin x$, удовлетворяющие неравенству $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

30.20. Найдите все корни уравнения $\sin x + \cos x = 1$, удовлетворяющие неравенству $0 < x < \pi$.

30.21. При каких значениях a имеет корни уравнение:

1) $\sin^2 x - (3a - 3)\sin x + a(2a - 3) = 0$;
2) $\cos^2 x + 2\cos x + a^2 - 6a + 10 = 0$?

30.22. При каких значениях a имеет корни уравнение:

1) $\cos^2 x - \cos x + a - a^2 = 0$; 2) $\sin^2 x - 2a\sin x + 2a^2 - 4a + 4 = 0$?

$2\sin 2x\cos x - \sin 2x = 0$; $\sin 2x(2\cos x - 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \cos x = \dfrac{1}{2};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi n}{2},\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Ответ: $\dfrac{\pi n}{2}$, $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

Пример 4. Решите уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$.

Решение. Воспользовавшись формулами понижения степени, запишем:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Далее имеем: $\cos 4x + (\cos 2x + \cos 6x) = 0$; $\cos 4x + 2\cos 4x\cos 2x = 0$; $2\cos 4x\left(\dfrac{1}{2} + \cos 2x\right) = 0$. Получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0,\\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2}.\end{array}\right. \quad \text{Отсюда} \quad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4},\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$, $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

Упражнения

31.1. Решите уравнение:

1) $\cos x + \cos 3x = 0$;
2) $\sin 5x - \sin x = 0$;
3) $2\sin x\cos 2x - \sin x + 2\cos 2x - 1 = 0$;
4) $2\sin x\,\mathrm{tg}\,x + 2\sqrt{3}\sin x - \mathrm{tg}\,x - \sqrt{3} = 0$.

31.2. Решите уравнение:

1) $\sin 7x + \sin x = 0$;
2) $\cos 9x - \cos x = 0$;
3) $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}\,x - 2 = 0$;
4) $\sqrt{2}\cos x\,\mathrm{ctg}\,x - 3\sqrt{2}\cos x + \mathrm{ctg}\,x - 3 = 0$.

31.3. Решите уравнение:

1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 0$;
2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = 0$;
3) $\sin 5x = \cos 4x$;
4) $\sin 10x - \cos 2x = 0$.

31.4. Решите уравнение:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{12} + x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 0$;
2) $\cos 5x + \sin 3x = 0$.

31.5. Решите уравнение:

1) $\sin 2x + 2\sin x = \cos x + 1$;
2) $1 + \cos 8x = \cos 4x$;
3) $\cos x + \cos 3x + \cos 2x = 0$;
4) $2\sin 2x + \cos 3x - \cos x = 0$;
5) $\cos x - \cos 3x + \sin x = 0$;
6) $\sin 4x + 2\cos^2 x = 1$;
7) $\cos x - \cos 3x = 3\sin^2 x$;
8) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;
9) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$;
10) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.

31.6. Решите уравнение:

1) $\sin 2x + 2\sin x = 0$;
2) $\sin 2x - \cos x = 2\sin x - 1$;
3) $1 - \cos 8x = \sin 4x$;
4) $\sin 2x + \sin 4x + \cos x = 0$;
5) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
6) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$;
7) $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$;
8) $\sqrt{2}\cos 5x + \sin 3x - \sin 7x = 0$.

31.7. Решите уравнение:

1) $\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{3x}{2} = 1$;
2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1{,}5$;
3) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$;
4) $1 - \cos x = \operatorname{tg} x - \sin x$;
5) $\sin x + \sin 3x = 4\cos^2 x$;
6) $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$;
7) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$;
8) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;
9) $\cos 9x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$.

31.8. Решите уравнение:

1) $\cos^2 6x + \cos^2 5x = 1$;
2) $\cos^2 x - \sin^2 2x + \cos^2 3x = \frac{1}{2}$;
3) $\cos 2x - \cos 4x = \sin 6x$;
4) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin x$;
5) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;
6) $\sin 6x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$.

Упражнения для повторения

31.9. Решите неравенство:

1) $\frac{3}{x+2} \geqslant \frac{5}{2-x}$;
2) $\frac{2}{1-2x} \leqslant \frac{3}{x+5}$.

31.10. В двух сплавах массы меди и цинка относятся как 5 : 2 и 3 : 4. Сколько надо взять килограммов первого сплава и сколько второго, чтобы, сплавив их, получить 28 кг нового сплава с равным содержанием меди и цинка?

Примеры решения более сложных тригонометрических уравнений

Пример 1. Решите уравнение $\cos x + \sin x + \sin x \cos x = 1$.

Решение. Пусть $\cos x + \sin x = t$. Тогда $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = t^2$; $\sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$. Данное в условии уравнение принимает вид $t + \dfrac{t^2 - 1}{2} = 1$. Отсюда $t^2 + 2t - 3 = 0$; $t_1 = -3$, $t_2 = 1$.

С учётом замены получаем совокупность $\left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = -3, \\ \cos x + \sin x = 1.\end{array}\right.$

Поскольку $|\cos x| \leqslant 1$ и $|\sin x| \leqslant 1$, то первое уравнение совокупности корней не имеет.

Остаётся решить уравнение $\cos x + \sin x = 1$. Имеем:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};\ x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n;\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x = 2\pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $2\pi n,\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

Пример 2. Решите уравнение $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$.

Решение. Формула $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\big)$ позволяет преобразовать данное уравнение таким образом:

$$\cos 3x + \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x) = 0.$$ Далее получаем:

$$\cos 3x + \cos x = 0;\ 2\cos 2x \cos x = 0;\ \left[\begin{array}{l}\cos x = 0, \\ \cos 2x = 0;\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

Пример 3. Решите уравнение $4\cos x\cos 2x\cos 4x = \cos 7x$.

Решение. Умножим обе части уравнения на $\sin x$. Получим уравнение-следствие:

$$4\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x = \cos 7x\sin x.$$

Отсюда $\sin 8x = 2\cos 7x\sin x$; $\sin 8x = \sin 8x - \sin 6x$; $\sin 6x = 0$; $x = \dfrac{\pi k}{6}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Поскольку корни уравнения $\sin x = 0$ не являются корнями данного в условии уравнения, то из полученных решений необходимо исключить все числа вида $x = \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Имеем:

$$\frac{\pi k}{6} \neq \pi m, \text{ отсюда } k \neq 6m.$$

Ответ: $\dfrac{\pi k}{6}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 6m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. ◂

Пример 4. Решите уравнение $\dfrac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \sin x} = 0$.

Решение. Перейдём к равносильной системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = 1, \end{array}\right. \\ \sin x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l,\ l \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Очевидно, что при чётных значениях k решения первого уравнения совокупности не удовлетворяют системе. При $k = 2m - 1$, $m \in \boldsymbol{Z}$, получаем: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi(2m - 1) = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◂

Пример 5. Решите уравнение $\cos\dfrac{x^2 - 8x}{5} = x^2 + 1$.

Решение. Поскольку при любом значении x выполняются неравенства $\cos\dfrac{x^2 - 8x}{5} \leqslant 1$ и $x^2 + 1 \geqslant 1$, то корнями данного уравнения являются те значения переменной x, при которых значения его левой и правой частей одновременно равны 1. Следовательно, данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos\dfrac{x^2 - 8x}{5} = 1, \\ x^2 + 1 = 1. \end{cases}$

Второе уравнение системы имеет единственный корень $x = 0$. Он также удовлетворяет первому уравнению системы.

Ответ: 0. ◂

Пример 6. Решите уравнение $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$(1 + \cos 2x) + \sin 2x + (\sin x + \cos x) = 0.$$

Теперь можно записать: $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x + (\sin x + \cos x) = 0$;

$$2\cos x(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x) = 0;$$

$$(2\cos x + 1)(\sin x + \cos x) = 0.$$

Получаем совокупность $\left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \sin x + \cos x = 0. \end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◂

Упражнения

1. Решите уравнение:

1) $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$;   2) $2\sin 2x = 3(\sin x + \cos x)$.

2. Решите уравнение:

1) $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$;   2) $2\cos(x + 20°)\cos x = \cos 40°$.

3. Решите уравнение:

1) $\sin^3 4x + \cos^3 4x = 1 - 0{,}5\sin 8x$;

2) $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 5x$;

3) $\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}(\cos^4 2x - \sin^4 2x)$.

4. Решите уравнение $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$.

5. Решите уравнение:

1) $\frac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \cos x} = 0$;   2) $\frac{8\sin x \cos x \sin 2x - 1}{\sqrt{3} + 2\sin 4x} = 0$.

6. Решите уравнение:

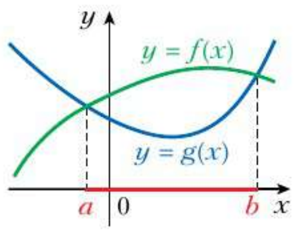
1) $2\cos\frac{x^2 + 2x}{6} = x^2 + 4x + 6$;   2) $\sin\frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$.

§ 32. Решение простейших тригонометрических неравенств

Неравенства вида $f(x) > a$, $f(x) < a$, где f — одна из четырёх тригонометрических функций, называют **простейшими тригонометрическими неравенствами**.

Основой для решения этих неравенств служат такие наглядные соображения: множеством решений неравенства $f(x) > g(x)$ является множество тех значений переменной x, при которых точки графика функции f расположены выше соответствующих точек графика функции g (рис. 32.1). С помощью этого рисунка устанавливаем, что промежуток $(a; b)$ – множество решений неравенства $f(x) > g(x)$.

Рис. 32.1



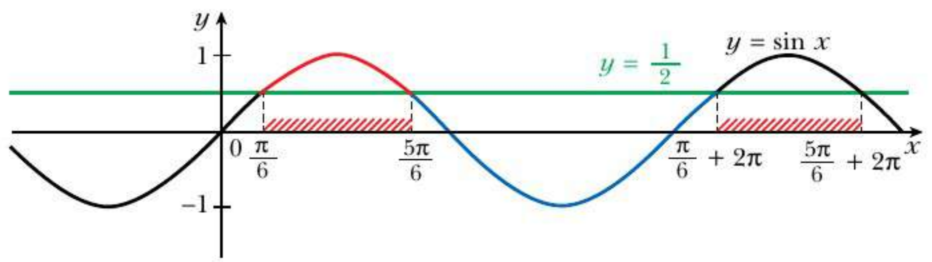
Решение простейших тригонометрических неравенств будем проводить по такой схеме: найдём решения на промежутке, длина которого равна периоду данной функции; все остальные решения отличаются от найденных на Tn, где T – период данной функции, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$.

Рассмотрим примеры.

<u>**Пример 1.**</u> Решите неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.

Решение. На рисунке 32.2 изображены графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$. Поскольку $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то графики пересекаются в точках с абсциссами $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Рис. 32.2



Решим данное неравенство на промежутке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + 2\pi\right]$ длиной в период функции $y = \sin x$.

На этом промежутке график функции $y = \sin x$ находится выше графика функции $y = \frac{1}{2}$ при $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ (см. рис. 32.2).

Следовательно, множеством решений данного неравенства является объединение всех промежутков вида $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Такое объединение принято обозначать так: $\bigcup\limits_{n \in \boldsymbol{Z}}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$.

Ответ обычно записывают одним из трёх способов:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi n < x < \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

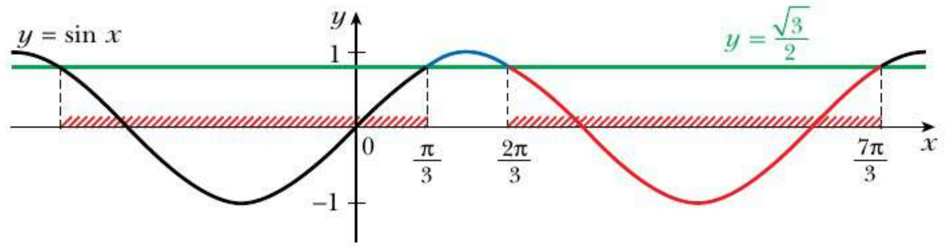
$$\text{или } \left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z},$$

$$\text{или } \bigcup_{n \in \boldsymbol{Z}}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right). \blacktriangleleft$$

Пример 2. Решите неравенство $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. На рисунке 32.3 изображены графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и отмечены абсциссы точек их пересечения.

Рис. 32.3



Поскольку $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то решим это неравенство на промежутке $\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}+2\pi\right]$, то есть на промежутке $\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}\right]$.

На рассматриваемом промежутке график функции $y = \sin x$ расположен ниже графика функции $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x \in \left(\frac{2\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}\right)$ (см. рис. 32.3).

Следовательно, множеством решений данного неравенства является объединение всех промежутков вида $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

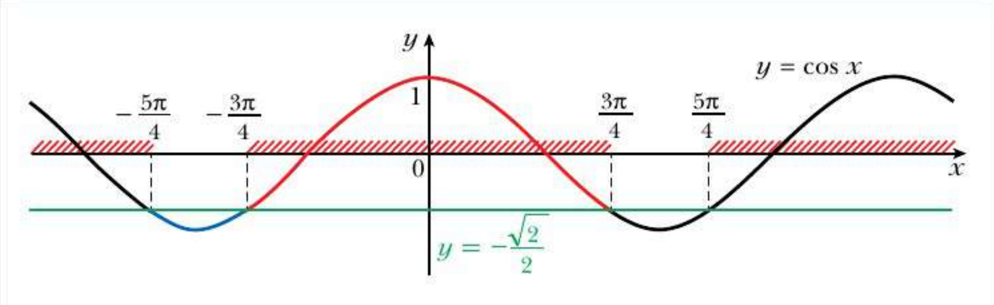
В примерах 1 и 2, решая неравенства вида $\sin x > a$ и $\sin x < a$, мы рассматривали промежуток вида $[\arcsin a; \arcsin a + 2\pi]$. Понятно, что решение можно провести, рассматривая любой другой промежуток, длина которого равна 2π, например промежуток $[-2\pi + \arcsin a; \arcsin a]$.

Пример 3. Решите неравенство $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Имеем: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Решим данное неравенство на промежутке $\left[-2\pi + \frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, то есть на промежутке $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

На этом промежутке график функции $y = \cos x$ расположен выше графика функции $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ (рис. 32.4).

Рис. 32.4



Следовательно, множеством решений данного неравенства является объединение всех промежутков вида $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

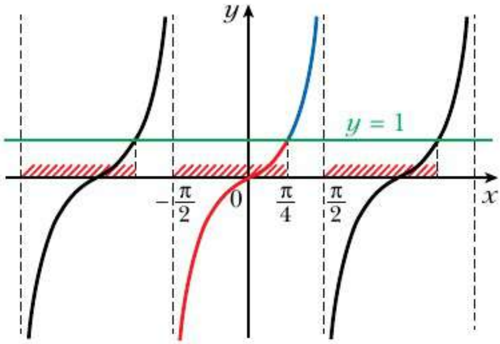
Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

Пример 4. Решите неравенство $\operatorname{tg} x < 1$.

Решение. Решим данное неравенство на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Поскольку $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то на рассматриваемом промежутке график функции $y = \operatorname{tg} x$ расположен ниже графика функции $y = 1$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ (рис. 32.5).

Рис. 32.5



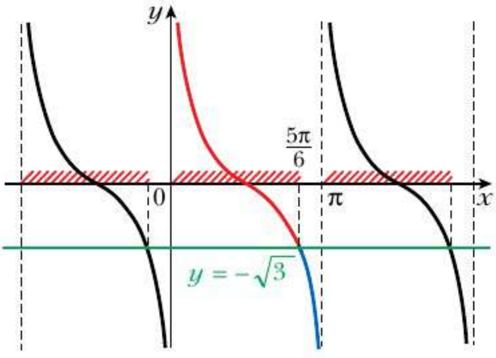
Следовательно, множеством решений данного неравенства является объединение всех промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 5. Решите неравенство $\operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

Решение. Решим данное неравенство на промежутке $(0; \pi)$.

Рис. 32.6



Так как $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$, то на рассматриваемом промежутке график функции $y = \operatorname{ctg} x$ расположен не ниже графика функции $y = -\sqrt{3}$ при $x \in \left(0; \frac{5\pi}{6}\right]$ (рис. 32.6).

Следовательно, множеством решений данного неравенства является объединение всех промежутков вида $\left(\pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

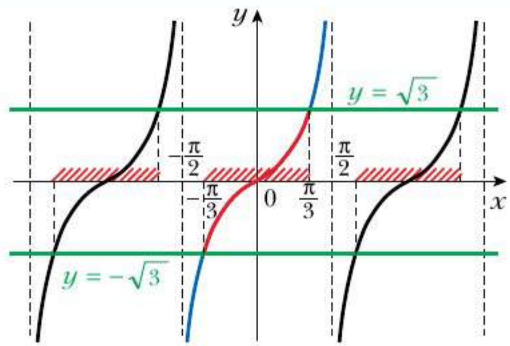
Ответ: $\pi n < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

Пример 6. Решите неравенство $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

Решение.

На рисунке 32.7 изображены графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sqrt{3}$ и $y = -\sqrt{3}$.

Рис. 32.7



Поскольку $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$, то на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ график функции $y = \operatorname{tg} x$ расположен ниже графика функции $y = \sqrt{3}$ и выше графика функции $y = -\sqrt{3}$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

1. Какие неравенства называют простейшими тригонометрическими неравенствами?

2. Поясните, по какой схеме проводится решение тригонометрических неравенств.

Упражнения

32.1. Решите неравенство:

1) $\sin x < \frac{1}{2}$;
2) $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\operatorname{tg} x < -1$;
6) $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$;
7) $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$;
8) $\operatorname{ctg} x > -1$;
9) $\sin x < \frac{1}{6}$;
10) $\operatorname{tg} x > 3$.

32.2. Решите неравенство:

1) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\sin x > -\frac{1}{2}$;
3) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$;
4) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\operatorname{tg} x \geqslant -1$;
6) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$;
7) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$;
8) $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$;
9) $\cos x > \frac{3}{5}$;
10) $\operatorname{ctg} x < 2$.

32.3. Решите неравенство:

1) $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{4}\right) < \sqrt{3}$;
3) $\operatorname{ctg} 5x > 1$;
4) $\cos(-3x) > \frac{1}{3}$.

32.4. Решите неравенство:

1) $\sin\frac{x}{3} < \frac{1}{2}$;
2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) > \sqrt{3}$;
3) $\operatorname{tg} 2x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
4) $\cos 4x < \frac{1}{4}$.

32.5. Решите неравенство:

1) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \sqrt{3}$;
2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$;
3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > \frac{1}{\sqrt{3}}$;
4) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \leqslant \sqrt{3}$;
5) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
6) $\sin(1 - 2x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

32.6. Решите неравенство:

1) $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \geqslant \sqrt{3}$;

2) $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) < 1$;

4) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$;

5) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{2}$;

6) $\sin\left(4x+\frac{\pi}{5}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

32.7. Решите неравенство:

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos x < \frac{1}{2}$;

2) $-\frac{1}{2} \leqslant \sin x < \frac{1}{4}$;

3) $-2 < \operatorname{tg} x < 3$;

4) $-1 \leqslant \operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$.

32.8. Решите неравенство:

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leqslant -\frac{1}{2}$;

2) $\frac{1}{3} \leqslant \sin x < \frac{1}{2}$;

3) $-4 < \operatorname{ctg} x < 1{,}5$;

4) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg} x < 1$.

Упражнения для повторения

32.9. Решите неравенство:

1) $\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^2} \leqslant 0$;

2) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8} \geqslant 0$;

3) $\frac{(x+1)(x-3)^2}{x+4} \leqslant 0$.

32.10. Из натуральных чисел от 1 до 32 включительно ученик наугад называет одно. Какова вероятность того, что это число является делителем числа 32?

Когда сделаны уроки

Примеры решения более сложных тригонометрических неравенств

Пример 1. Решите неравенство $\sin^4 x + \cos^4 x < \frac{5}{8}$.

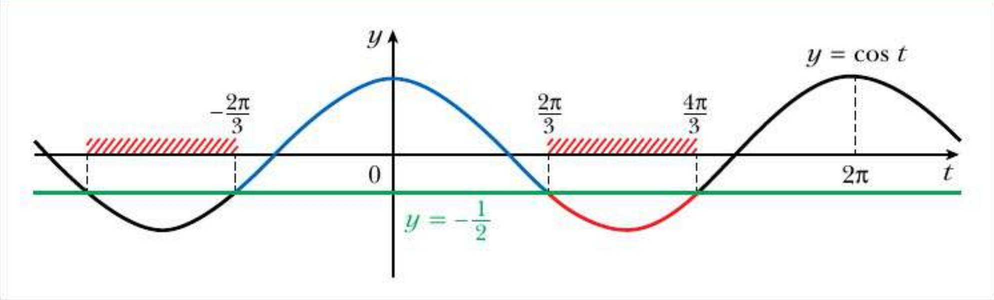
Решение. Имеем: $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x < \frac{5}{8}$;

$1 - \frac{1}{2}\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x < \frac{5}{8}$; $\frac{1}{2}\sin^2 2x > \frac{3}{8}$; $\frac{1-\cos 4x}{2} > \frac{3}{4}$; $\cos 4x < -\frac{1}{2}$.

Пусть $4x = t$. Получаем: $\cos t < -\frac{1}{2}$.

Отсюда $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 32.8).

Рис. 32.8



Тогда $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 4x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

Пример 2. Решите неравенство $-5\sin x + \cos 2x < 3$.
Решение. Имеем: $-5\sin x + 1 - 2\sin^2 x < 3$; $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 > 0$. Выполним замену $\sin x = t$, где $|t| \leqslant 1$. Имеем:

$$2t^2 + 5t + 2 > 0; \ t < -2 \text{ или } t > -\frac{1}{2}.$$

Поскольку $|t| \leqslant 1$, то исходное неравенство равносильно неравенству $\sin x > -\frac{1}{2}$. Отсюда $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

В § 5 вы ознакомились с методом интервалов. Покажем, как можно использовать этот метод для решения тригонометрических неравенств.

Пример 3. Решите неравенство $\sin 2x + \sin x > 0$.
Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin 2x + \sin x$, $D(f) = \boldsymbol{R}$. Поскольку для всех $x \in D(f)$ выполняются равенства $f(x - 2\pi) = f(x + 2\pi) = f(x)$ (убедитесь в этом самостоятельно), то функция f является периодической с периодом 2π.

Найдём нули функции f на промежутке $[-\pi; \pi]$.

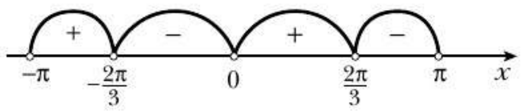
Имеем: $\sin 2x + \sin x = 0$;

$$2\sin x\cos x + \sin x = 0;\ 2\sin x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0;\ \left[\begin{array}{l}\sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \pi n, \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

На промежутке $[-\pi; \pi]$ функция f имеет пять нулей: $-\pi$, $-\frac{2\pi}{3}$, 0, $\frac{2\pi}{3}$, π. Эти числа разбивают указанный промежуток на промежутки знакопостоянства (рис. 32.9).

Рис. 32.9



Функция f принимает положительные значения на промежутках $\left(-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

С учётом периодичности функции f запишем ответ.

Ответ: $-\pi + 2\pi n < x < -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ или $2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◄

Упражнения

1. Решите неравенство:

1) $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} > \frac{1}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geqslant \sqrt{3}$;

3) $\sin x \geqslant \cos x$;

4) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}$.

2. Решите неравенство:

1) $4\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$;

2) $3 + 2\sin 3x \sin x > 3\cos 2x$.

3. Решите неравенство:

1) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$;

2) $\operatorname{tg}^2 x + \left(2 - \sqrt{3}\right)\operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0$;

3) $2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) > -1$;

4) $\operatorname{tg} x \geqslant 2\operatorname{ctg} x$;

5) $\sin 2x - \sin 3x > 0$.

Итоги главы 4

Функции, обратные к тригонометрическим

Арккосинусом числа b, где $|b| \leqslant 1$, называют такое число α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен b.

Арксинусом числа b, где $|b| \leqslant 1$, называют такое число α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен b.

Арктангенсом числа b называют такое число α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен b.

Арккотангенсом числа b называют такое число α из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен b.

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Формула корней уравнения
$\cos x = b,\ \lvert b \rvert \leqslant 1$	$x = \pm\arccos b + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\sin x = b,\ \lvert b \rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^n \arcsin b + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{ctg} x = b$	$x = \operatorname{arcctg} b + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Если обратиться к рисунку 33.3, то можно записать:

$$\lim_{x\to 1}\arccos x = 0, \quad \lim_{x\to -1}\arccos x = \pi.$$

Рис. 33.3

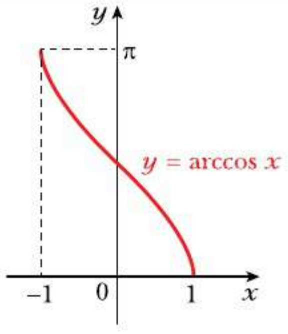
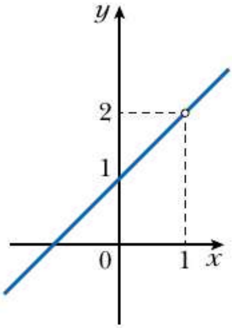


Рис. 33.4



На рисунке 33.4 изображён график функции $y = \frac{x^2-1}{x-1}$. Эта функция не определена в точке $x_0 = 1$, а во всех других точках совпадает с функцией $y = x + 1$ (сравните рис. 33.1 и 33.4). Однако если значения аргумента x, где $x \neq 1$, стремятся к числу 1, то соответствующие значения функции $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ стремятся к числу 2, то есть $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Этот пример показывает, что функция может быть не определена в точке, но иметь предел в этой точке.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{|x|}{x}$. При $x > 0$ получаем: $f(x) = 1$, при $x < 0$ получаем: $f(x) = -1$. График функции f изображён на рисунке 33.5.

Рис. 33.5

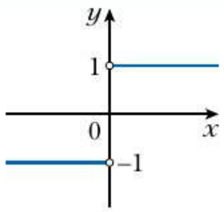


Рис. 33.6

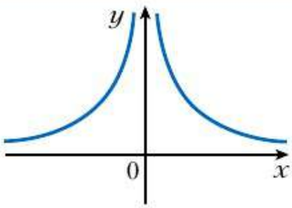
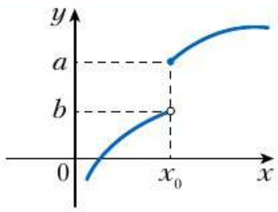


Рис. 33.7



Если значения аргумента x, где $x \neq 0$, стремятся к 0, то невозможно утверждать, что значения функции f стремятся к какому-нибудь определённому числу. Действительно, если значения аргумента x стремятся к нулю, оставаясь отрицательными, то соответствующие значения функции стремятся к -1, а если значения аргумента x стремятся к нулю, оставаясь положительными, то соответствующие значения функции стремятся к 1.

Поэтому функция $f(x) = \frac{|x|}{x}$ в точке $x_0 = 0$ не имеет предела.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (рис. 33.6). Если значения x, где $x \neq 0$, стремятся к 0, то соответствующие значения функции становятся всё бóльшими и бóльшими и неограниченно увеличиваются. Поэтому не существует числа, к которому стремятся значения функции f при условии, что значения аргумента стремятся к 0.

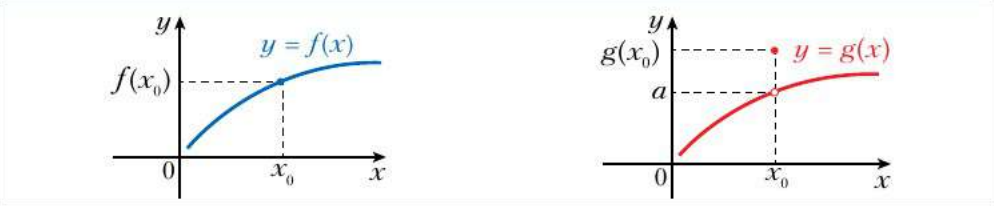
Следовательно, функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

Мы привели примеры двух функций, которые не определены в некоторой точке и не имеют предела в этой точке.

Ошибочным было бы считать, что если функция определена в некоторой точке x_0, то она обязательно имеет предел в этой точке. На рисунке 33.7 изображён график функции f, которая определена в точке x_0, но не имеет предела в этой точке.

На рисунке 33.8 изображены графики функций f и g, которые определены в точке x_0 и имеют предел в этой точке. Однако поведение этих функций в точке x_0 существенно различается. График функции g, в отличие от графика функции f, в точке x_0 имеет *разрыв*. Такое различие поведения функций f и g в точке x_0 можно охарактеризовать с помощью предела.

Рис. 33.8



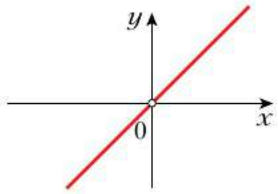
Для функции g имеем: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$. Для функции f можно записать: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Иными словами, *предел функции f в точке x_0 равен значению функции в этой точке.*

В этом случае говорят, что **функция f является непрерывной в точке** x_0. Таким образом, на рисунке 33.8 изображён график функции f, непрерывной в точке x_0, а также график функции g, имеющей предел в точке x_0, но не являющейся непрерывной в точке x_0.

Из равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ следует, что если функция f не имеет предела в точке x_0 или не определена в этой точке, то она не может быть непрерывной в точке x_0.

Рис. 33.9



Например, функция, график которой изображён на рисунке 33.7, не является непрерывной в точке x_0. Также не является непрерывной в точке $x_0 = 0$ функция $y = \frac{x^2}{x}$ (рис. 33.9).

Если функция f является непрерывной в каждой точке некоторого множества M, то говорят, что она **непрерывна на множестве** M.

Например, функция $y = x^2$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$, а функция $y = \frac{1}{x^2}$ является непрерывной на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Если функция f является непрерывной на $D(f)$, то такую функцию называют **непрерывной**.

Заметим, что в рассматриваемом курсе алгебры и начал математического анализа не предполагается подробное изучение теории пределов функции в точке. Обратим внимание, что в учебнике не даётся строгое определение предела. Вместе с тем в дальнейшем мы будем пользоваться интуитивно понятными фактами этой теории. Например, $\lim\limits_{x \to 1}(1 - 2x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0} 7 = 7$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2 - x^2} = \frac{1}{2}$.

Упражнения

33.1. Построив график функции f, выясните, имеет ли функция f предел в точке x_0:

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 2$;
5) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;
6) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$;
7) $f(x) = 17$, $x_0 = 3$;
8) $f(x) = \frac{|x - 2|}{2 - x}$, $x_0 = 2$.

33.2. Построив график функции f, выясните, имеет ли функция f предел в точке x_0:

1) $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = -2$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x_0 = -1$;

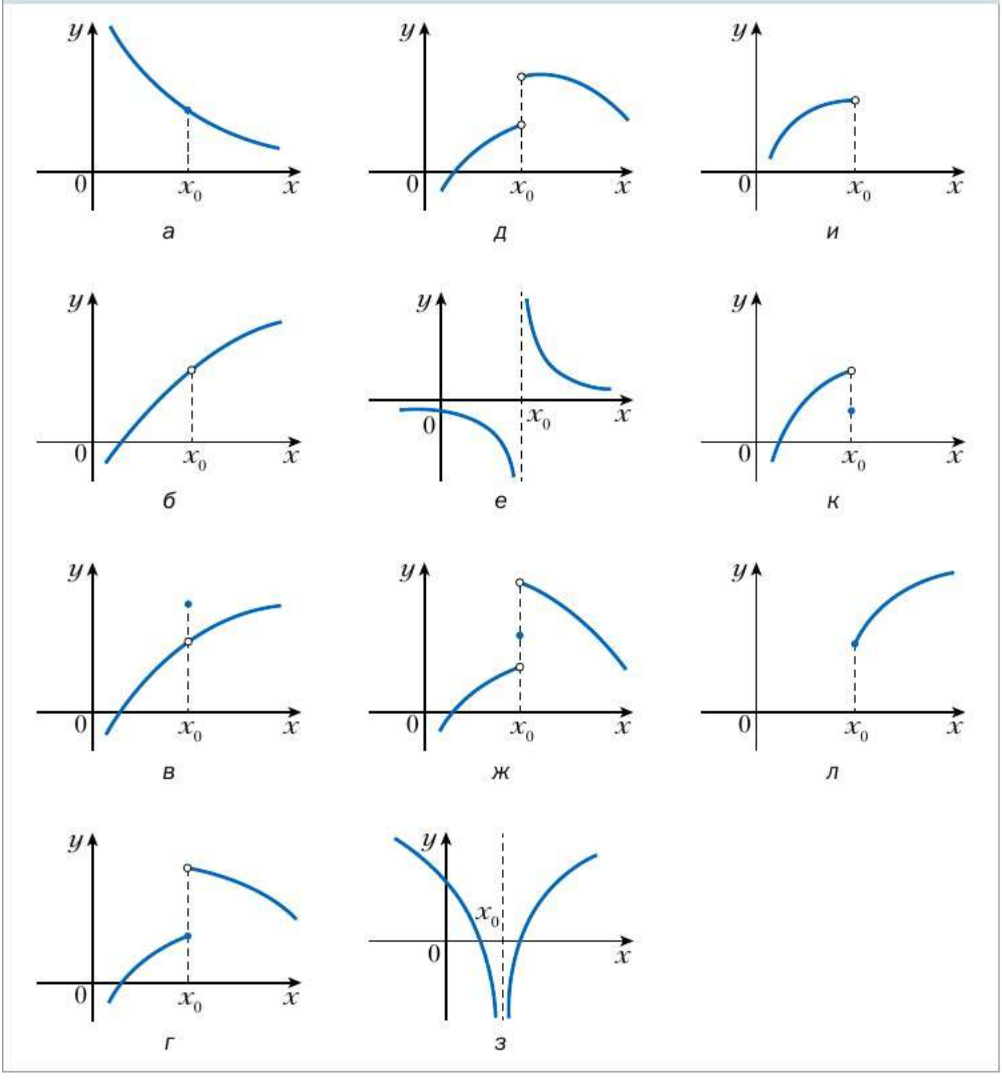
4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x_0 = -3$;

5) $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$, $x_0 = 2$;

6) $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$, $x_0 = 1$.

33.3. С помощью графика функции f (рис. 33.10) выясните, имеет ли функция f предел в точке x_0.

Рис. 33.10



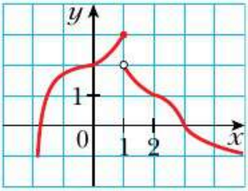
33.4. На рисунке 33.11 изображён график функции $y = f(x)$.

1) Чему равно значение функции f в точке $x_0 = 1$?

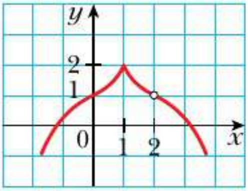
2) Существует ли предел функции f в точке $x_0 = 1$? В случае утвердительного ответа запишите с использованием соответствующей символики, чему он равен.

3) Существует ли предел функции f в точке $x_0 = 2$? В случае утвердительного ответа запишите с использованием соответствующей символики, чему он равен.

Рис. 33.11



а



б

33.5. Значения аргумента функции f стремятся к числу x_0. Выясните, к какому числу стремятся соответствующие значения функции f:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = x + 1$, $x_0 = -2$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{x}$, $x_0 = 0$;

4) $f(x) = k$, $x_0 = a$, где k и a — некоторые числа.

33.6. Выясните, является ли непрерывной функция f в точке x_0:

1) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

3) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \sqrt{-x}$, $x_0 = -1$.

33.7. Выясните, является ли непрерывной функция f в точке x_0:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 2, \\ x + 2, \text{ если } x \geqslant 2, \end{cases}$ $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 1, \text{ если } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x > 1, \\ x - 2, \text{ если } x \leqslant 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$.

33.8. Является ли непрерывной функция f в точке x_0:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x}, \text{ если } x < -2, \\ x - 1, \text{ если } x \geqslant -2, \end{cases}$ $x_0 = -2;$

2) $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2, \text{ если } x \leqslant -1, \\ x + 3, \text{ если } x > -1, \end{cases}$ $x_0 = -1?$

Готовимся к изучению новой темы

33.9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 7)$, угловой коэффициент которой равен: 1) 4; 2) −3; 3) 0.

33.10. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая:
1) $y = x - 6$; 2) $y = 1 - x$; 3) $y = 3$?

33.11. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $A(2; 6)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол:
1) 60°; 2) 120°.

§ 34. Задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции

Если функция является математической моделью реального процесса, то часто возникает необходимость находить разность значений этой функции в двух точках. Например, обозначим через $f(t)$ и $f(t_0)$ суммы средств, которые накопились на депозитном[1] счёте вкладчика к моментам времени t и t_0. Тогда разность $f(t) - f(t_0)$, где $t > t_0$, показывает прибыль, которую получит вкладчик за время $t - t_0$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть x_0 — фиксированная точка из области определения функции f.

Если x — произвольная точка области определения функции f такая, что $x \neq x_0$, то разность $x - x_0$ называют **приращением аргумента функции f в точке** x_0 и обозначают Δx (читают: «дельта икс»)[2].

Имеем: $\Delta x = x - x_0$.

Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

[1] *Депозитный* — от депозит (банковский вклад) — деньги, которые вкладчик передаёт банку на некоторый срок, за что банк выплачивает вкладчику проценты.

[2] Говоря о приращении аргумента функции f в точке x_0, здесь и далее будем предполагать, что в любом промежутке вида $(x_0 - h; x_0 + h)$ есть точки области определения функции f, отличные от x_0.

Говорят, что аргумент x **получил приращение** Δx **в точке** x_0.

Отметим, что приращение аргумента может быть как положительным, так и отрицательным: если $x > x_0$, то $\Delta x > 0$; если $x < x_0$, то $\Delta x < 0$.

Если аргумент в точке x_0 получил приращение Δx, то значение функции f изменилось на величину

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Эту разность называют **приращением функции** f **в точке** x_0 и обозначают Δf (читают: «дельта эф»).

Имеем:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ или}$$
$$\Delta f = f(x) - f(x_0).$$

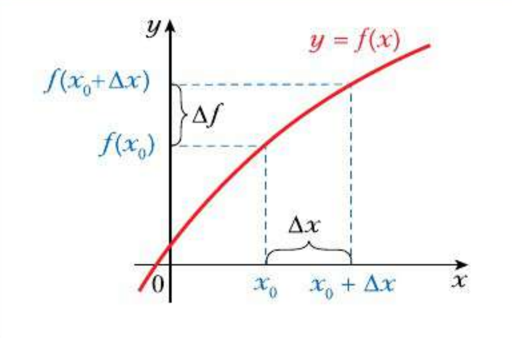
Для приращения функции $y = f(x)$ также принято обозначение Δy, то есть

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ или}$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Приращение Δx аргумента в точке x_0 и соответствующее приращение Δf функции показаны на рисунке 34.1.

Отметим, что для фиксированной точки x_0 приращение функции f в точке x_0 является функцией с аргументом Δx.

Рис. 34.1



Пример 1. Найдите приращение функции $y = x^2$ в точке x_0, которое соответствует приращению Δx аргумента.

Решение. Имеем:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Ответ: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$. ◄

Задача о мгновенной скорости

Пусть автомобиль, двигаясь по прямолинейному участку дороги в одном направлении, за 2 ч преодолел путь 120 км. Тогда его средняя скорость движения равна: $v_{\text{ср}} = \frac{120}{2} = 60$ (км/ч).

Найденная величина даёт неполное представление о характере движения автомобиля: на одних участках пути автомобиль мог двигаться быстрее, на других — медленнее, иногда мог останавливаться.

Вместе с тем в любой момент времени спидометр автомобиля показывал некоторую величину — скорость в данный момент времени. Значения скорости в разные моменты более полно характеризуют движение автомобиля.

Рассмотрим задачу о поиске скорости в данный момент времени на примере равноускоренного движения.

Пусть материальная точка движется по координатной прямой и через время t после начала движения имеет координату $s(t)$. Тем самым задана функция $y = s(t)$, позволяющая определить положение точки в любой момент времени. Поэтому эту функцию называют **законом движения** точки.

Например, из курса физики известно, что закон равноускоренного движения задаётся формулой $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где s_0 – координата точки в начале движения (при $t = 0$), v_0 – начальная скорость, a – ускорение.

Пусть, например, $s_0 = 0$, $v_0 = 1$ м/с, $a = 2$ м/с^2. Тогда $s(t) = t^2 + t$.

Зафиксируем какой-нибудь момент времени t_0 и придадим аргументу в точке t_0 приращение Δt, то есть рассмотрим промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$. За этот промежуток времени материальная точка осуществит перемещение Δs. Имеем:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0+\Delta t)} - \underbrace{(t_0^2 + t_0)}_{s(t_0)} =$$

$$= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.$$

Средняя скорость $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ движения точки за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ равна отношению $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Имеем:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t, \text{ то есть } v_{\text{ср}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t.$$

Обозначение для средней скорости $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ подчёркивает, что при заданном законе движения $y = s(t)$ и фиксированном моменте времени t_0 значение средней скорости зависит только от Δt.

Если рассматривать достаточно малые промежутки времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, то из практических соображений понятно, что средние скорости $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ за такие промежутки времени мало отличаются друг от друга, то есть величина $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ почти не изменяется. Чем меньше Δt, тем ближе значение средней скорости к некоторому числу, определяющему скорость в момент времени t_0. Иными словами, если при $\Delta t \to 0$ значения $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ стремятся к числу $v(t_0)$, то число $v(t_0)$ называют **мгновенной скоростью** в момент времени t_0.

В нашем примере если $\Delta t \to 0$, то значения выражения $2t_0 + 1 + \Delta t$ стремятся к числу $2t_0 + 1$, которое является значением мгновенной скорости $v(t_0)$, то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}(2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Этот пример показывает, что если материальная точка двигается по закону $y = s(t)$, то её мгновенную скорость в момент времени t_0 определяют с помощью формулы

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}(\Delta t), \text{ то есть}$$

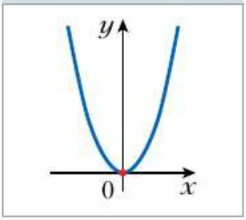
$$\boxed{\boldsymbol{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}}}$$

Задача о касательной к графику функции

Известное определение касательной к окружности как прямой, которая имеет с окружностью только одну общую точку, неприменимо в случае произвольной кривой.

Например, ось ординат имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку (рис. 34.2). Однако интуиция подсказывает, что неестественно считать эту прямую касательной к этой параболе. Вместе с тем в курсе алгебры мы нередко говорили, что парабола $y = x^2$ касается оси абсцисс в точке $x_0 = 0$.

Рис. 34.2



Уточним наглядное представление о касательной к графику функции.

Пусть M — некоторая точка, лежащая на параболе $y = x^2$. Проведём прямую OM, которую назовём секущей (рис. 34.3). Представим, что точка M, двигаясь по параболе, приближается к точке O. При этом секущая OM будет поворачиваться вокруг точки O. Тогда угол между прямой OM и осью абсцисс будет становиться всё меньше и меньше, и секущая OM будет стремиться занять положение оси абсцисс. Поэтому ось абсцисс считают касательной к параболе $y = x^2$ в точке O.

Рис. 34.3

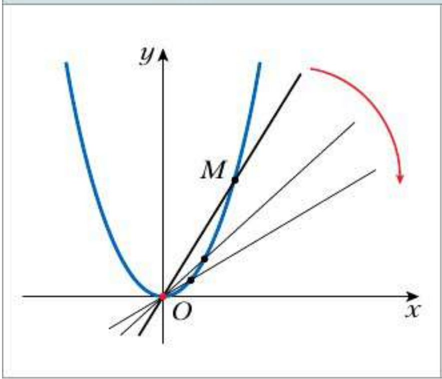
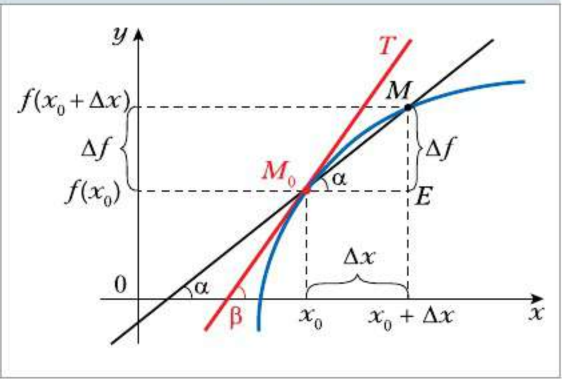


Рис. 34.4



Рассмотрим график некоторой непрерывной в точке x_0 функции f и точку $M_0(x_0; f(x_0))$. В точке x_0 придадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку $M(x; f(x))$, где $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 34.4).

Из рисунка видно, что если Δx становится всё меньше и меньше, то точка M, двигаясь по графику, приближается к точке M_0. Если при $\Delta x \to 0$ секущая M_0M стремится занять положение некоторой прямой (на рисунке 34.4 это прямая M_0T), то такую прямую называют **касательной к графику функции f в точке M_0**.

Пусть секущая M_0M имеет уравнение $y = kx + b$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол α. Как известно, угловой коэффициент k прямой M_0M равен $\operatorname{tg}\alpha$, то есть $k = \operatorname{tg}\alpha$. Очевидно, что $\angle MM_0E = \alpha$ (см. рис. 34.4). Тогда из ΔMM_0E получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Введём обозначение $k_{\text{сек}}(\Delta x)$ для углового коэффициента секущей M_0M, тем самым подчёркивая, что для данной функции f и фиксированной точки x_0 угловой коэффициент секущей M_0M зависит только от приращения Δx аргумента.

Имеем: $k_{\text{сек}}(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пусть касательная M_0T образует с положительным направлением оси абсцисс угол β ($\beta \neq 90°$). Тогда её угловой коэффициент $k(x_0)$ равен $\operatorname{tg}\beta$.

Естественно считать, что чем меньше Δx, тем меньше значение углового коэффициента секущей отличается от значения углового коэффициента касательной. Иными словами, если $\Delta x \to 0$, то $k_{\text{сек}}(\Delta x) \to k(x_0)$. Вообще, угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0 определяют с помощью формулы

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}(\Delta x), \text{ то есть}$$

$$\boxed{\boldsymbol{k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}}$$

Пример 2. Найдите формулу для вычисления углового коэффициента касательной к графику функции $f(x) = -x^2$ в точке с абсциссой x_0. Какой угол с положительным направлением оси абсцисс образует касательная, проведённая к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = -\dfrac{1}{2}$?

Решение. Имеем: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0 + \Delta x)^2 - (-x_0^2) = -2x_0\Delta x - \Delta x^2$.

Тогда, воспользовавшись формулой для вычисления углового коэффициента касательной, можно записать:

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_0 \Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x).$$

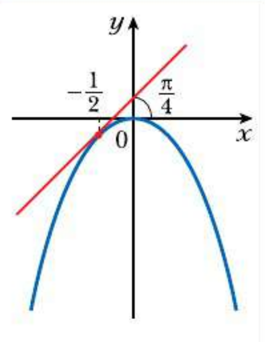
Если $\Delta x \to 0$, то значения выражения $-2x_0 - \Delta x$ стремятся к числу $-2x_0$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x) = -2x_0$. Отсюда $k(x_0) = -2x_0$.

Эта формула позволяет вычислить угловой коэффициент касательной к параболе $y = -x^2$ в любой точке, в частности в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Имеем: $k\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Пусть касательная к параболе в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{1}{2}$ образует угол α $\left(0 \leqslant \alpha < \pi \text{ и } \alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$ с положительным направлением оси абсцисс. Тогда её угловой коэффициент равен $\operatorname{tg} \alpha$. Мы установили, что $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Поскольку $0 \leqslant \alpha < \pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (рис. 34.5). ◄

Рис. 34.5



Упражнения

34.1. Найдите приращение функции f в точке x_0, если:
1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}2$;
2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;
3) $f(x) = \frac{6}{x}$, $x_0 = 1{,}2$, $\Delta x = -0{,}3$.

34.2. Найдите приращение функции f в точке x_0, если:
1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}3$; 2) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}8$.

34.3. Для функции $f(x) = x^2 - 3x$ выразите приращение Δf функции f в точке x_0 через x_0 и x. Найдите Δf, если:
1) $x_0 = 3$, $x = 2{,}5$; 2) $x_0 = -2$, $x = -1$.

34.4. Для функции $f(x) = x^3$ выразите приращение Δf функции f в точке x_0 через x_0 и x. Найдите Δf, если $x_0 = 0{,}5$, $x = 0{,}4$.

34.5. Для функции $f(x) = x^2 - x$ и точки x_0 найдите $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

34.6. Для функции $f(x) = 5x + 1$ и точки x_0 найдите $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

34.7. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^2 + 3$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите мгновенную скорость материальной точки в момент времени $t_0 = 2$ с.

34.8. Тело движется по координатной прямой по закону $s(t) = 5t^2$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите:

1) среднюю скорость тела при изменении времени от $t_0 = 1$ с до $t_1 = 3$ с;

2) мгновенную скорость тела в момент $t_0 = 1$ с.

34.9. Найдите угловой коэффициент:

1) секущей графика функции $y = x^2$, проходящей через точки графика с абсциссами $x_0 = 1$ и $x_1 = 1{,}6$;

2) касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

34.10. Найдите угловой коэффициент:

1) секущей графика функции $y = x^3$, проходящей через точки графика с абсциссами $x_0 = 2$ и $x_1 = 1$;

2) касательной к графику функции $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Готовимся к изучению новой темы

34.11. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите угол α.

34.12. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -1$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Найдите угол α.

§ 35. Понятие производной

В предыдущем параграфе, решая две разные задачи о мгновенной скорости материальной точки и об угловом коэффициенте касательной, мы пришли к одной и той же математической модели: пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

К аналогичным формулам приводит решение целого ряда задач математики, физики, химии, биологии, экономики и других наук. Это свидетельствует о том, что рассматриваемая модель заслуживает особого внимания. Ей стоит присвоить название, ввести обозначение, изучить её свойства и научиться их применять.

Определение

Производной функции f в точке x_0 называют число, равное пределу отношения приращения функции f в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают так: $f'(x_0)$ (читают: «эф штрих от икс нулевого») или $y'(x_0)$. Можно записать:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

или

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Производную функции f в точке x_0 можно вычислить по такой схеме:

1) придав в точке x_0 аргументу приращение Δx, найти соответствующее приращение Δf функции:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2) найти отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;

3) выяснить, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то есть найти предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

<u>**Пример 1.**</u> Найдите производную функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Придерживаясь вышеприведённой схемы, запишем:

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1 + \Delta x} - \frac{1}{1} = \frac{-\Delta x}{1 + \Delta x}$;

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{1}{1 + \Delta x}$;

3) при $\Delta x \to 0$ значения выражения $-\frac{1}{1 + \Delta x}$ стремятся к числу -1, то есть $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{1}{1 + \Delta x}\right) = -1$.

Ответ: -1. ◄

Отметим, что, найдя значение $f'(1)$, мы тем самым нашли угловой коэффициент $k(x_0)$ касательной, проведённой к графику функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Он равен -1, то есть $k(1) = -1$. Тогда, обозначив через α угол, образованный этой касательной с положительным направлением оси абсцисс, можем записать: $\operatorname{tg}\alpha = -1$. Отсюда $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ (рис. 35.1).

Вообще, можно сделать такой вывод: *угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0, равен производной функции f в точке x_0*, то есть

$$\boxed{k(x_0) = f'(x_0)}$$

Это равенство выражает **геометрический смысл производной**.

Исходя из определения мгновенной скорости, можно сделать такой вывод: *если $y = s(t)$ — закон движения материальной точки по координатной прямой, то её мгновенная скорость в момент времени t_0 равна производной функции $y = s(t)$ в точке t_0*, то есть

$$\boxed{v(t_0) = s'(t_0)}$$

Это равенство выражает **механический смысл производной**.

Если функция f имеет производную в точке x_0, то эту функцию называют **дифференцируемой в точке** x_0.

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Из геометрического смысла производной следует, что к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести *невертикальную* касательную (рис. 35.2). И наоборот, если к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести невертикальную касательную, то функция f дифференцируема в точке x_0.

Рис. 35.1

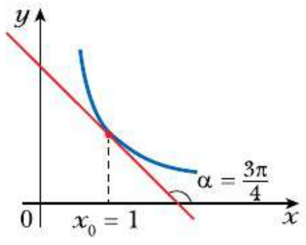
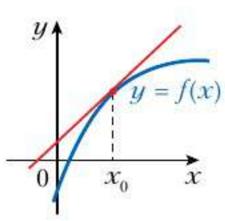
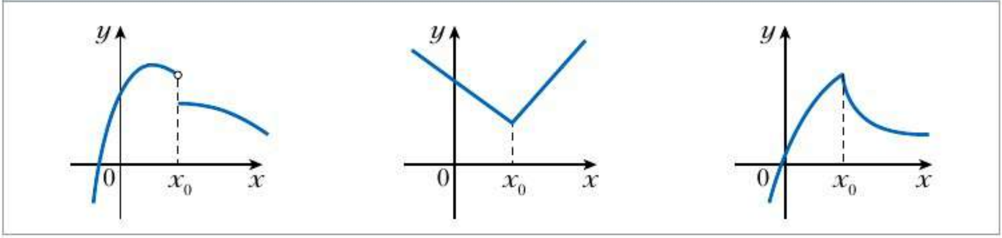


Рис. 35.2



На рисунке 35.3 изображены графики функций, которые в точке x_0 имеют разрыв или излом. К указанным графикам в точке с абсциссой x_0 невозможно провести касательную. Эти функции не дифференцируемы в точке x_0.

Рис. 35.3



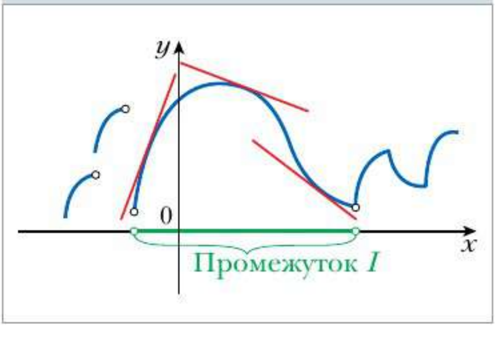
На рисунке 35.4 изображены графики функций, которые в точке с абсциссой x_0 имеют вертикальную касательную. Поэтому эти функции не дифференцируемы в точке x_0.

Рис. 35.4

Пусть M – множество точек, в которых функция f дифференцируема. Каждому числу $x \in M$ поставим в соответствие число $f'(x)$. Это правило задаёт функцию с областью определения M. Такую функцию называют **производной функции** $y = f(x)$ и обозначают f' или y'.

Если функция f дифференцируема в каждой точке некоторого множества M, то говорят, что она **дифференцируема на множестве** M. Например, на рисунке 35.5 изображён график функции, дифференцируемой на промежутке I. На промежутке I этот график не имеет разрывов и изломов.

Рис. 35.5



Если функция f дифференцируема на $D(f)$, то её называют **дифференцируемой**.

Поскольку x_0 – произвольная точка области определения функции $f(x) = x^2$, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 2x. ◄$$

Последнее равенство также принято записывать в виде

$$\boxed{(\boldsymbol{x^2})' = \boldsymbol{2x}} \qquad (2)$$

Пример 4. Найдите производную функции $f(x) = x^3$.

Решение. Найдём производную функции f в точке x_0, где x_0 – произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = (x_0 + \Delta x - x_0)((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2) = \Delta x((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2)$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x\left((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2\right)}{\Delta x} = (x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2$;

3) если $\Delta x \to 0$, то значения выражения $(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2$ стремятся к числу $3x_0^2$. Следовательно, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2$.

Так как x_0 – произвольная точка области определения функции f, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 3x^2. ◄$$

Последнее равенство можно записать так:

$$\boxed{(\boldsymbol{x^3})' = \boldsymbol{3x^2}} \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) – частные случаи более общей формулы:

$$\boxed{(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{nx^{n-1}},\ \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{n} > \mathbf{1}} \qquad (4)$$

Например, $(x^5)' = 5x^4$, $(x^7)' = 7x^6$.

Формула (4) остаётся справедливой для любого $n \in \boldsymbol{Z}$ и $x \neq 0$, то есть

$$\boxed{(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{nx^{n-1}},\ \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}} \qquad (5)$$

Например, воспользуемся формулой (5) для нахождения производной функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Имеем:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Следовательно, для любого $x \neq 0$ выполняется равенство $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ или

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Формулу (5) также можно обобщить для любого $r \in \boldsymbol{Q}$ и $x > 0$:

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \boldsymbol{Q}} \qquad (6)$$

Например, найдём производную функции $f(x) = \sqrt{x}$, воспользовавшись формулой (6). Имеем: $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Следовательно, для $x > 0$ можно записать: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ или

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Вообще, производную функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, можно находить по формуле

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}} \qquad (7)$$

Если n – нечётное натуральное число, то формула (7) позволяет находить производную функции f во всех точках x таких, что $x \neq 0$.

Если n – чётное натуральное число, то формула (7) позволяет находить производную функции f для всех положительных значений x.

Обратимся к тригонометрическим функциям $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Эти функции являются дифференцируемыми, и их производные находят по таким формулам:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

При вычислении производных удобно пользоваться таблицей производных, расположенной на первом форзаце.

Упражнения

35.1. Найдите производную функции:

1) $y = 5x - 6$; 2) $y = \dfrac{1-x}{3}$; 3) $y = 9$; 4) $y = 8 - 3x$.

35.2. Найдите производную функции:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^{-15}$; 3) $y = \dfrac{1}{x^{17}}$; 4) $y = x^{\frac{1}{5}}$.

35.3. Найдите производную функции:

1) $y = x^{10}$; 2) $y = \dfrac{1}{x^8}$; 3) $y = x^{\frac{7}{6}}$; 4) $y = x^{-0,2}$.

35.4. Продифференцируйте функцию:

1) $y = \sqrt[4]{x}$; 2) $y = \sqrt[8]{x^7}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$.

35.5. Продифференцируйте функцию:

1) $y = \sqrt[9]{x}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^5}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$.

35.6. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\dfrac{\pi}{6}$.

35.7. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\dfrac{\pi}{4}$.

35.8. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = x\sqrt{x},\ x_0 = 81$; 3) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}},\ x_0 = 16$;

2) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x},\ x_0 = 1$; 4) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[6]{x}},\ x_0 = 64$.

35.9. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = x\sqrt[4]{x},\ x_0 = 256$;

2) $f(x) = \sqrt[8]{x\sqrt{x}},\ x_0 = 1$.

35.10. Пользуясь определением производной, найдите $f'(x)$, если:

1) $f(x) = \dfrac{3}{x}$; 2) $f(x) = 4 - x^2$.

35.11. Пользуясь определением производной, найдите $f'(x)$, если:

1) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

35.12. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

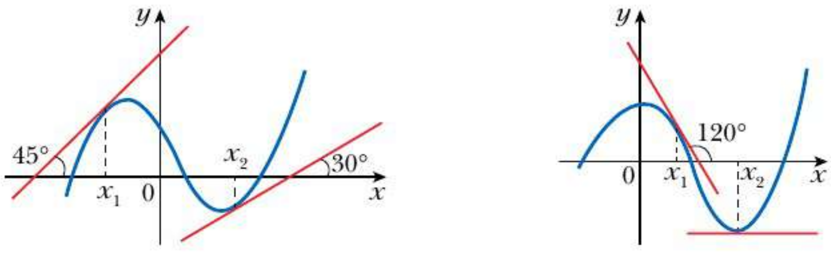
1) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

35.13. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^4$, $x_0 = -2$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $x_0 = -3$;
4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

35.14. Найдите с помощью графика функции f (рис. 35.6) значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

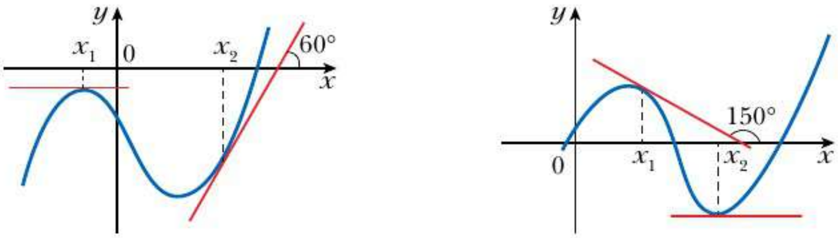
Рис. 35.6



а б

35.15. Найдите с помощью графика функции f (рис. 35.7) значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

Рис. 35.7



а б

35.16. На рисунке 35.8 изображён график функции f. Укажите несколько значений аргумента x, для которых:

1) $f'(x) > 0$; 2) $f'(x) < 0$; 3) $f'(x) = 0$.

35.17. К графику функции f в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 35.9). Найдите $f'(x_0)$.

Рис. 35.8

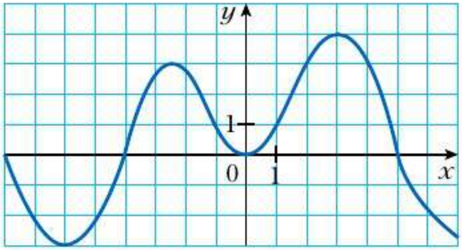
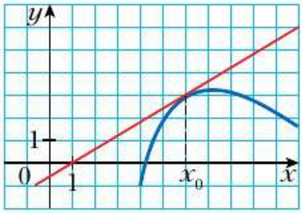


Рис. 35.9



35.18. К графику функции f в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 35.10). Найдите $f'(x_0)$.

35.19. На рисунке 35.11 изображён график функции f. Укажите точки, в которых производная равна нулю, и точки, в которых производная не существует.

Рис. 35.10

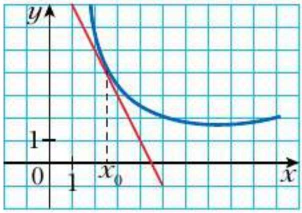
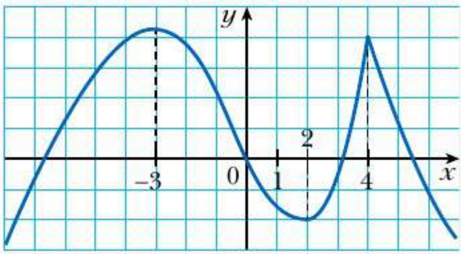


Рис. 35.11

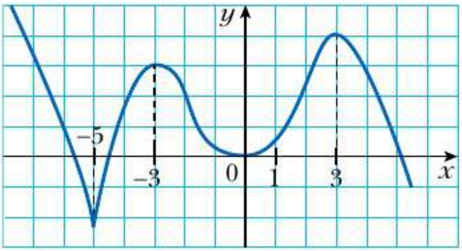
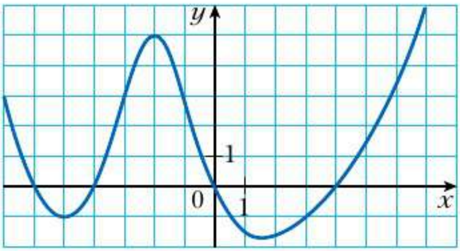


35.20. На рисунке 35.12 изображён график функции f. Укажите точки, в которых производная равна нулю, и точки, в которых производная не существует.

35.21. На рисунке 35.13 изображён график функции f. Сравните:

1) $f'(-5)$ и $f'(1)$; 3) $f'(-2)$ и $f'(4)$;

2) $f'(-1)$ и $f'(6)$; 4) $f'(0)$ и $f'(5)$.

Рис. 35.12	Рис. 35.13
	

35.22. Касательная к графику функции f в точке с абсциссой x_0 имеет угловой коэффициент k. Найдите x_0, если:

1) $f(x) = x^3$, $k = 3$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $k = \frac{1}{4}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $k = -\frac{1}{4}$;

4) $f(x) = \sin x$, $k = 0$.

35.23. Касательная к графику функции f в точке с абсциссой x_0 имеет угловой коэффициент k. Найдите x_0, если:

1) $f(x) = x^4$, $k = -32$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $k = \frac{1}{27}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $k = -\frac{1}{27}$;

4) $f(x) = \cos x$, $k = 1$.

35.24. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^2$. Найдите $s'\left(\frac{1}{2}\right)$. Какой механический смысл имеет найденная величина?

35.25. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^3$. Найдите $s'(2)$. Какой механический смысл имеет найденная величина?

Упражнения для повторения

35.26. Упростите выражение $\left(\frac{a+5}{(a-9)(a+9)} + \frac{a+7}{(a-9)^2}\right)\left(\frac{a-9}{a+3}\right)^2 + \frac{7+a}{9+a}$.

35.27. Решите уравнение $\frac{5}{x^2-4x+4} - \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} = 0$.

§ 36. Правила вычисления производных

Найдём, пользуясь определением, производную функции $f(x) = x^2 + x$ в точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

1) $\Delta f = \underbrace{(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)}_{f(x_0+\Delta x)} - \underbrace{(x_0^2 + x_0)}_{f(x_0)} = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + x_0 + \Delta x -$

$- x_0^2 - x_0 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x;$

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x + 1;$

3) если $\Delta x \to 0$, то значения выражения $2x_0 + \Delta x + 1$ стремятся к числу $2x_0 + 1$. Следовательно, при любом $x_0 \in \boldsymbol{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x + 1) = 2x_0 + 1.$$

Так как x_0 – произвольная точка области определения функции $f(x) = x^2 + x$, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 2x + 1, \text{ то есть}$$
$$(x^2 + x)' = 2x + 1.$$

Из предыдущего параграфа вам известно, что $(x^2)' = 2x$ и $(x)' = 1$. Таким образом, получаем:

$$(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)'.$$

Следовательно, производную функции $y = x^2 + x$ можно найти как сумму производных функций $y = x^2$ и $y = x$.

Справедлива следующая теорема[1].

Теорема 36.1
(производная суммы)

В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x) + g(x)$, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Коротко говорят: *производная суммы равна сумме производных.*

Также принята такая упрощённая запись:

$$\boxed{(f + g)' = f' + g'}$$

Для доказательства этой теоремы необходимы более глубокие знания из теории пределов функции в точке, что выходит за рамки рассматриваемого курса. Тем не менее приведём интуитивно понятные доказательные рассуждения.

[1] Условия теорем 36.1–36.4 предусматривают следующее: если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то соответственно функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)g(x)$, $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $y = f(g(x))$ определены на некотором промежутке, содержащем точку x_0.

Пусть x_0 — произвольная точка, в которой функции f и g дифференцируемы. Найдём приращение функции $y = f(x) + g(x)$ в точке x_0. Имеем:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$
$$= (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) = \Delta f + \Delta g.$$

Запишем: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \right).$

Поскольку функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$. Отсюда получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Следовательно, функция $y = f(x) + g(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, причём её производная в этой точке равна $f'(x_0) + g'(x_0)$.

Теорему 36.1 можно обобщить для любого конечного количества слагаемых:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'.$$

Две теоремы, приведённые ниже, также упрощают нахождение производной.

Теорема 36.2
(производная произведения)

В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x)\, g(x)$, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x).$$

Также принята такая упрощённая запись:

$$\boxed{(fg)' = f'g + g'f}$$

Следствие 1

В тех точках, в которых дифференцируема функция $y = f(x)$, также является дифференцируемой функция $y = kf(x)$, где k — некоторое число, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Коротко говорят: *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

Также принята такая упрощённая запись:

$$(kf)' = kf'$$

Доказательство

Так как функция $g(x) = k$ дифференцируема в любой точке, то, применяя теорему о производной произведения, можно записать:

$$(kf(x))' = (k)'f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x).$$ ◂

Следствие 2

В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x) - g(x)$, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Доказательство

Имеем:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1) \cdot g(x))' =$$
$$= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x).$$ ◂

Теорема 36.3
(производная частного)

В тех точках, в которых функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы и значение функции g не равно нулю, функция $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также является дифференцируемой, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Также принята такая упрощённая запись:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

<u>**Пример 1.**</u> Найдите производную функции:

1) $y = \dfrac{1}{x} - \sin x + 4x^2$; 2) $y = x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)$;

3) $y = x^3 \cos x$; 4) $y = \frac{2x^2+1}{3x-2}$.

Решение. 1) Пользуясь теоремой о производной суммы и следствием из теоремы о производной произведения, получаем:

$$y' = \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x.$$

2) По теореме о производной произведения получаем:

$$y' = (x^{-\frac{1}{2}}(5x-3))' = (x^{-\frac{1}{2}})' \cdot (5x-3) + (5x-3)' \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot (5x - 3) + 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3-5x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{3-5x+10x}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3+5x}{2\sqrt{x^3}}.$$

3) Имеем: $y' = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$.

4) По теореме о производной частного получаем:

$$y' = \left(\frac{2x^2+1}{3x-2}\right)' = \frac{(2x^2+1)'(3x-2)-(3x-2)'(2x^2+1)}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{4x(3x-2)-3(2x^2+1)}{(3x-2)^2} = \frac{12x^2-8x-6x^2-3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2-8x-3}{(3x-2)^2}. ◄$$

Используя теорему о производной частного, легко доказать, что

$$\boldsymbol{(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\boldsymbol{(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Действительно, $(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Формулу $(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ докажите самостоятельно.

Рассмотрим функции $f(t) = 2t - 1$ и $g(x) = x^2 + x + 1$. Значения одной функции могут служить значениями аргумента другой функции. Например, $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Следовательно, можно говорить, что формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задаёт функцию $y = f(g(x))$.

Если для любого $x \in M$ все значения функции $t = g(x)$ являются значениями аргумента функции $y = f(t)$, то говорят, что задана **сложная функция** $y = f(g(x))$ с областью определения M.

Находить производную сложной функции можно с помощью следующей теоремы.

Теорема 36.4
(производная сложной функции)

Если функция $t = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(t)$ дифференцируема в точке t_0, где $t_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ является дифференцируемой в точке x_0, причём

$$y'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0).$$

Пример 2. Найдите значение производной функции в точке x_0:

1) $y = (3x - 7)^6$, $x_0 = 2$;

2) $y = \sqrt{4x^2 + 1}$, $x_0 = 0$;

3) $y = \sin\frac{x}{2}$, $x_0 = \pi$;

4) $y = \operatorname{tg}^3 5x$, $x_0 = \frac{\pi}{15}$.

Решение

1) Данная функция $y = (3x - 7)^6$ является сложной функцией $y = f(g(x))$, где $f(t) = t^6$, $g(x) = 3x - 7$. Поскольку $f'(t) = 6t^5$, а $g'(x) = 3$, то по теореме о производной сложной функции можно записать:

$$y'(x) = f'(t)g'(x) = 6t^5 \cdot 3 \text{ при } t = 3x - 7,$$

то есть

$$y'(x) = 6(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18(3x - 7)^5; \quad y'(2) = 18 \cdot (3 \cdot 2 - 7)^5 = -18.$$

Решение этой задачи можно оформить и так:

$$y' = ((3x - 7)^6)' = 6(3x - 7)^5 \cdot (3x - 7)' = 6(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18(3x - 7)^5;$$
$$y'(2) = -18.$$

2) $y' = \left(\sqrt{4x^2 + 1}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{4x^2 + 1}} \cdot (4x^2 + 1)' = \dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$;

$y'(0) = 0.$

3) $y' = \left(\sin\dfrac{x}{2}\right)' = \cos\dfrac{x}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$; $\quad y'(\pi) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} = 0.$

4) $y' = (\operatorname{tg}^3 5x)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \cdot (\operatorname{tg} 5x)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \cdot \dfrac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \dfrac{15\operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x}$;

$$y'\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{15\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}}{\cos^2\frac{\pi}{3}} = 15 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 45 : \frac{1}{4} = 180.$$

Ответ: 1) –18; 2) 0; 3) 0; 4) 180. ◄

Сформулируйте теорему о производной: 1) суммы; 2) произведения; 3) частного; 4) сложной функции.

Упражнения

36.1. Найдите производную функции:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10$;
2) $y = 4x^6 + 20\sqrt{x}$;
3) $y = x^8 + 7x^6 + \frac{4}{x} - 1$;
4) $y = 4\sin x - 5\cos x$;
5) $y = \operatorname{tg} x - 9x$;
6) $y = 2x^{-2} + 3x^{-3}$.

36.2. Найдите производную функции:

1) $y = 2x^5 - x$;
2) $y = x^7 - 4\sqrt{x}$;
3) $y = -3\sin x + 2\cos x$;
4) $y = x - \frac{5}{x}$;
5) $y = 12 - \operatorname{ctg} x$;
6) $y = 0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}$.

36.3. Найдите производную функции:

1) $y = (x + 2)(x^2 - 4x + 5)$;
2) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$;
3) $y = x^2 \sin x$;
4) $y = x \operatorname{ctg} x$;
5) $y = (2x + 1)\sqrt{x}$;
6) $y = \sqrt{x} \cos x$.

36.4. Найдите производную функции:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$;
2) $y = (x + 5)\sqrt{x}$;
3) $y = x^4 \cos x$;
4) $y = x \operatorname{tg} x$.

36.5. Найдите производную функции:

1) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$;
2) $y = \frac{5}{3x - 2}$;
3) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$;
4) $y = \frac{x^3}{\cos x}$;
5) $y = \frac{3 - x^2}{4 + 2x}$;
6) $y = \frac{x^2 - 5x}{x - 7}$.

36.6. Найдите производную функции:

1) $y = \frac{3x + 5}{x - 8}$;
2) $y = \frac{7}{10x - 3}$;
3) $y = \frac{2x^2}{1 - 6x}$;
4) $y = \frac{\sin x}{x}$;
5) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
6) $y = \frac{x^2 + 6x}{x + 2}$.

36.7. Чему равно значение производной функции f в точке x_0, если:

1) $f(x) = \frac{8}{x} + 5x - 2$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = \frac{2 - 3x}{x + 2}$, $x_0 = -3$;
3) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2} - 2\sin x$, $x_0 = 0$;
4) $f(x) = (1 + 3x)\sqrt{x}$, $x_0 = 9$;
5) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 1$;
6) $f(x) = x \sin x$, $x_0 = 0$?

36.8. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x,\ x_0 = \frac{1}{4}$;

2) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - x},\ x_0 = 0$;

3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3},\ x_0 = 2$;

4) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1},\ x_0 = 1$.

36.9. Задайте с помощью формул сложные функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$, если:

1) $f(x) = \sin x,\ g(x) = x^2 - 1$;

2) $f(x) = x^4,\ g(x) = 5x + 2$;

3) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \frac{x}{x - 1}$;

4) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

36.10. Задайте с помощью формул сложные функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$, если:

1) $f(x) = x^2,\ g(x) = \operatorname{tg} x$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ g(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$.

36.11. Могут ли две разные функции иметь равные производные? Ответ проиллюстрируйте примерами.

36.12. Найдите производную функции:

1) $y = (2x + 3)^5$;

2) $y = \left(\frac{1}{3}x - 6\right)^{18}$;

3) $y = \cos 2x$;

4) $y = \sin^2 x$;

5) $y = 3\operatorname{ctg}\frac{x}{5}$;

6) $y = \sqrt{2x + 1}$;

7) $y = \sqrt[3]{1 - x}$;

8) $y = \sqrt{x^2 + 1}$;

9) $y = \frac{1}{4x + 5}$;

10) $y = \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1\right)^{-6}$;

11) $y = \sqrt{\sin x}$;

12) $y = \sin\sqrt{x}$.

36.13. Найдите производную функции:

1) $y = (3x - 5)^6$;

2) $y = \sin\frac{x}{3}$;

3) $y = \cos^2 x$;

4) $y = 2\operatorname{tg} 4x$;

5) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

6) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

7) $y = \sqrt[4]{6x + 8}$;

8) $y = (9x - 2)^{-3}$;

9) $y = \sqrt{\cos x}$.

36.14. Ученик предлагает находить производную функции $y = \sin 2x$ так:

1) делает замену $2x = t$ и получает функцию $y = \sin t$;

2) далее пишет: $y' = (\sin t) = \cos t$;

3) потом подставляет значение $2x = t$ и делает вывод, что $(\sin 2x)' = \cos 2x$.

В чём ошибка этого ученика?

36.15. Тело движется по координатной прямой по закону $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите скорость движения тела в момент времени $t_0 = 5$ с.

36.16. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = (t+2)^2(t+5)$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите её скорость движения в момент времени $t_0 = 3$ с.

36.17. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $x_0 = -3$; 2) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

36.18. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \sqrt{4 - 3x}$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

36.19. Найдите производную функции:

1) $y = \frac{1}{x^9} - \frac{3}{x^3}$; 5) $y = \frac{\cos 3x}{x-1}$;

2) $y = x\sqrt{2x+1}$; 6) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;

3) $y = \sin x \cos 2x$; 7) $y = (x+1)^3(x-2)^4$;

4) $y = \operatorname{tg} x \sin(2x+5)$; 8) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

36.20. Найдите производную функции:

1) $y = \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x^6}$; 3) $y = \sin 2x \cos x$;

2) $y = x\sqrt{x+3}$; 4) $y = (x+2)^5(x-3)^4$.

36.21. Материальная точка массой 4 кг движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^2 + 4$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите импульс $P(t) = mv(t)$ материальной точки в момент времени $t_0 = 2$ с.

36.22. Тело массой 2 кг движется по координатной прямой по закону $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите кинетическую энергию $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$ тела в момент времени $t_0 = 4$ с.

36.23. Тело движется по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^2 - 8t + 15$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Определите координату тела в момент времени, когда его кинетическая энергия равна нулю.

36.24. Найдите производную функции:

1) $y = \cos^3 2x$; 2) $y = \sqrt{\sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}$; 3) $y = \left(\sin\frac{x}{3} - 5\right)^6$.

36.25. Вычислите:

1) $f'(0)$, если $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x-1}}$; 2) $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, если $f(x) = \sin^2 \dfrac{x}{2}$.

Готовимся к изучению новой темы

36.26. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; -3)$ и параллельной оси абсцисс.

36.27. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -4)$, если угловой коэффициент этой прямой равен:

1) 4; 2) 0; 3) −1.

36.28. Среди прямых, заданных уравнениями, укажите пары параллельных:

1) $y = 3x - 5$; 3) $y = -3x$; 5) $y - 3x + 2 = 0$;

2) $y = -3x - 5$; 4) $y = 7 - 3x$; 6) $y = \dfrac{1}{3}x + 7$.

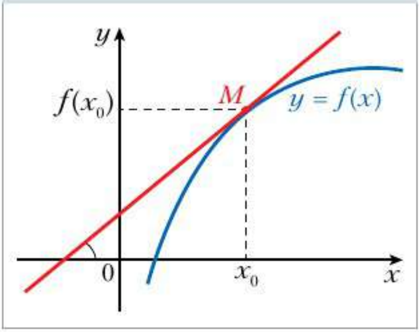
36.29. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; 9)$ и параллельной прямой $y = 9x - 16$.

36.30. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 4x + 2$ и пересекает прямую $y = -8x + 9$ в точке, принадлежащей оси ординат.

§ 37. Уравнение касательной

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести невертикальную касательную (рис. 37.1).

Рис. 37.1



Из курса геометрии 9 класса вы знаете, что уравнение невертикальной прямой имеет вид $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент этой прямой.

Исходя из геометрического смысла производной, получаем: $k = f'(x_0)$.

Тогда уравнение касательной можно записать так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \qquad (1)$$

Эта прямая проходит через точку $M(x_0; f(x_0))$. Следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнению (1). Имеем:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

Отсюда $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Тогда уравнение (1) можно переписать так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Итак, если функция f дифференцируема в точке x_0, то **уравнение касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0**, имеет вид

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Пример 1. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

Решение. Имеем: $f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2$;

$f'(x) = -4 - 6x$;

$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8$.

Подставив найденные числовые значения в уравнение касательной, получаем: $y = 8(x + 2) - 2$, то есть $y = 8x + 14$.

Ответ: $y = 8x + 14$. ◄

Пример 2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 6x$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

Решение. Решив уравнение $2x^2 - 6x = 0$, найдём абсциссы точек пересечения графика функции f с осью абсцисс. Имеем: $2x(x - 3) = 0$; $x = 0$ или $x = 3$.

Запишем уравнение касательной в каждой из найденных точек.

1) Если $x_0 = 0$, то $f(0) = 0$; $f'(x) = 4x - 6$; $f'(0) = -6$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = -6x$.

2) Если $x_0 = 3$, то $f(3) = 0$; $f'(3) = 4 \cdot 3 - 6 = 6$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = 6(x - 3)$, то есть $y = 6x - 18$.

Ответ: $y = -6x$; $y = 6x - 18$. ◄

Пример 3. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x+4}{x-4}$, если эта касательная параллельна прямой $y = -2x + 4$.

Решение. Имеем:

$$f'(x) = \frac{(x+4)'(x-4) - (x-4)'(x+4)}{(x-4)^2} = \frac{(x-4)-(x+4)}{(x-4)^2} = -\frac{8}{(x-4)^2}.$$

Если касательная параллельна прямой $y = -2x + 4$, то её угловой коэффициент k равен -2.

Поскольку $f'(x_0) = k$, где x_0 — абсцисса точки касания искомой прямой и графика функции f, то $f'(x_0) = -2$, то есть $-\frac{8}{(x_0 - 4)^2} = -2$. Отсюда

$$(x_0-4)^2=4;\ \left[\begin{array}{l}x_0-4=2,\\x_0-4=-2;\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x_0=6,\\x_0=2.\end{array}\right.$$

Следовательно, на графике функции $f(x)=\dfrac{x+4}{x-4}$ существуют две точки, касательные в которых параллельны данной прямой.

При $x_0=6$ имеем: $f(x_0)=5$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y=-2(x-6)+5$; $y=-2x+17$.

При $x_0=2$ получаем: $f(x_0)=-3$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y=-2(x-2)-3$; $y=-2x+1$.

Ответ: $y=-2x+17$; $y=-2x+1$. ◄

Пример 4. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x)=\sqrt{2x-1}$, в которой проведённая к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°.

Решение. Имеем: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot(2x-1)'=\dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

Так как касательная образует угол 45° с положительным направлением оси абсцисс, то её угловой коэффициент k равен $\operatorname{tg}45°$, то есть $k=1$. Пусть x_0 — абсцисса точки касания. Тогда $f'(x_0)=1$.

Получаем: $\dfrac{1}{\sqrt{2x_0-1}}=1$. Отсюда $\sqrt{2x_0-1}=1$; $2x_0-1=1$; $x_0=1$.

Ответ: 1. ◄

Запишите уравнение касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0.

Упражнения

37.1. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x)=x^2+3x$, $x_0=-1$;
2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=\dfrac{1}{2}$;
3) $f(x)=4\sqrt{x}-3$, $x_0=9$;
4) $f(x)=\sin x$, $x_0=0$;
5) $f(x)=\cos x$, $x_0=\pi$;
6) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$;
7) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $x_0=-2$;
8) $f(x)=\sqrt{2x+5}$, $x_0=2$.

37.2. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

4) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$;

5) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}$, $x_0 = -1$;

6) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$, $x_0 = 3$.

37.3. Запишите уравнение касательной к графику данной функции в точке его пересечения с осью ординат:

1) $f(x) = x^2 - 3x - 3$;

2) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

37.4. Запишите уравнение касательной к графику данной функции в точке его пересечения с осью ординат:

1) $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$;

2) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

37.5. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке его пересечения с осью абсцисс:

1) $f(x) = 8x^3 - 1$;

2) $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

37.6. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке его пересечения с осью абсцисс:

1) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$;

2) $f(x) = 3x - x^2$.

37.7. Найдите координаты точки параболы $y = 2x^2 - x + 1$, в которой касательная к ней параллельна прямой $y = 7x - 8$.

37.8. В каких точках касательные к графику функции $y = \frac{1}{x}$ параллельны прямой $y = -x$?

37.9. К графику функции $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ проведены касательные в точках с абсциссами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Каково взаимное расположение этих касательных?

37.10. Найдите такую точку графика функции f, что проведённая в этой точке касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, если:

1) $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $\alpha = 45°$;

2) $f(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}x - 2$, $\alpha = 60°$;

3) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$, $\alpha = 45°$;

4) $f(x) = \frac{x + 7}{x - 2}$, $\alpha = 135°$.

37.11. Найдите такую точку графика функции f, что проведённая в этой точке касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, если:

1) $f(x) = \sqrt{3}x - \frac{x^3}{3}$, $\alpha = 60°$; 2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $\alpha = 45°$.

37.12. Докажите, что любая касательная к графику функции f образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс:

1) $f(x) = 6 - x - x^3$; 2) $f(x) = \frac{5 - x}{x - 3}$.

37.13. Докажите, что любая касательная к графику функции f образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс:

1) $f(x) = x^5 + 2x - 8$; 2) $f(x) = \frac{4}{1 - x}$.

37.14. Найдите уравнения горизонтальных касательных к графику функции:

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$; 2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1$.

37.15. Найдите уравнения горизонтальных касательных к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$.

37.16. Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = x^2 - 5x$, если эта касательная параллельна прямой $y = -x$;

2) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 3x$;

3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1$, если эта касательная параллельна прямой $y = 2x + 1$.

37.17. Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$, если эта касательная параллельна прямой $y = -7x + 3$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = x$.

37.18. Определите, является ли прямая $y = 12x - 10$ касательной к графику функции $f(x) = 4x^3$. В случае утвердительного ответа укажите абсциссу точки касания.

37.19. Определите, является ли прямая $y = x$ касательной к графику функции $y = \sin x$. В случае утвердительного ответа укажите абсциссу точки касания.

37.20. Определите, является ли прямая $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$. В случае утвердительного ответа укажите абсциссу точки касания.

37.21. Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

37.22. Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Готовимся к изучению новой темы

37.23. Решите неравенство:

1) $x^2 + x - 12 > 0$;

2) $x^2 - 3x - 10 \leqslant 0$;

3) $6x - x^2 \geqslant 0$;

4) $\dfrac{x^2 + 10x + 9}{x^2 - 4x + 3} < 0$;

5) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0$;

6) $(x + 1)^3(x - 1)^2(x - 3)^6 > 0$.

§ 38. Признаки возрастания и убывания функции

Вы знаете, что если функция является константой, то её производная равна нулю. Возникает вопрос: если функция f такова, что для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x) = 0$, то является ли функция f константой на промежутке I?

Обратимся к механической интерпретации.

Пусть $y = s(t)$ — закон движения материальной точки по координатной прямой. Если в любой момент времени t от t_1 до t_2 выполняется равенство $s'(t) = 0$, то на протяжении рассматриваемого промежутка времени мгновенная скорость равна нулю, то есть точка не движется и её координата не изменяется. Это означает, что на рассматриваемом промежутке функция $y = s(t)$ является константой.

Эти соображения подсказывают, что справедлива следующая теорема.

Теорема 38.1
(признак постоянства функции)

Если для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция f является константой на этом промежутке.

На рисунке 38.1 изображён график функции f, которая является дифференцируемой на промежутке $[a; b]$. Этот график имеет такое свойство:

любая касательная к графику образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс.

Поскольку тангенс острого угла – положительное число, то угловой коэффициент любой касательной также является положительным. Тогда, исходя из геометрического смысла производной, можно сделать такой вывод: для любого $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$.

Из рисунка 38.1 видно, что функция f возрастает на рассматриваемом промежутке.

На рисунке 38.2 изображён график функции f, дифференцируемой на промежутке $[a; b]$. Любая касательная к графику образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс.

Рис. 38.1

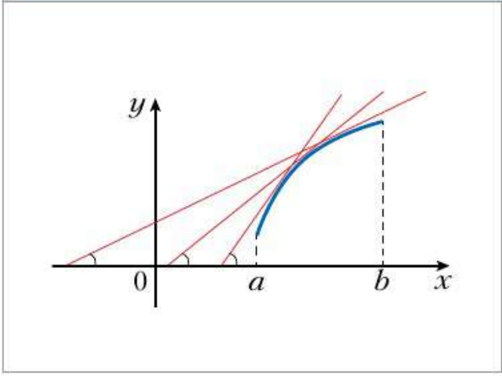
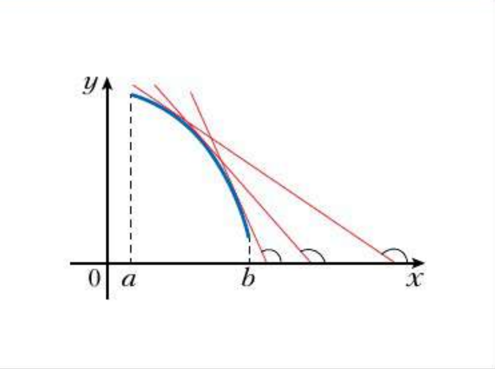


Рис. 38.2



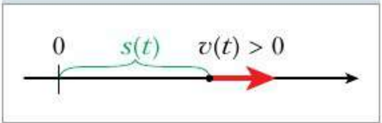
Поскольку тангенс тупого угла – отрицательное число, то угловой коэффициент любой касательной также является отрицательным. Тогда для любого $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$.

Из рисунка 38.2 видно, что функция f убывает на рассматриваемом промежутке.

Эти примеры показывают, что знак производной функции на некотором промежутке I связан с тем, является ли эта функция возрастающей (убывающей) на промежутке I.

Связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции можно увидеть и с помощью механической интерпретации. Если скорость, то есть производная функции $y = s(t)$, положительна, то точка на координатной прямой движется вправо (рис. 38.3). Это означает, что из неравенства $t_1 < t_2$ следует неравенство $s(t_1) < s(t_2)$, то есть функция $y = s(t)$ является возрастающей. Аналогич-

Рис. 38.3



но если скорость отрицательна, то точка движется влево, то есть функция $y = s(t)$ является убывающей.

Связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 38.2
(признак возрастания функции)

Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на этом промежутке.

Теорема 38.3
(признак убывания функции)

Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция f убывает на этом промежутке.

Пример 1. Докажите, что функция $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x - 100$ возрастает на множестве действительных чисел.

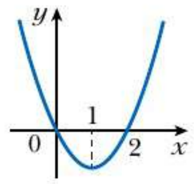
Решение. Имеем: $f'(x) = x^4 + x^2 + 1$. Поскольку $x^4 + x^2 + 1 > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$, то функция f возрастает на множестве действительных чисел. ◄

Пример 2. Найдите промежутки возрастания (убывания) функции $f(x) = x^2 - 2x$.

Решение. Имеем: $f'(x) = 2x - 2$. Решив неравенства $2x - 2 > 0$ и $2x - 2 < 0$, приходим к такому: $f'(x) > 0$ на промежутке $(1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ на промежутке $(-\infty; 1)$. Следовательно, функция f возрастает на промежутке $(1; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 1)$.

На рисунке 38.4 изображён график функции $f(x) = x^2 - 2x$. Из рисунка видно, что на самом деле функция f возрастает на промежутке $[1; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 1]$.

Рис. 38.4



При записи ответа будем руководствоваться таким правилом: если функция f непрерывна в каком-то из концов промежутка возрастания (убывания), то эту точку присоединяют к этому промежутку. В нашем примере функция $f(x) = x^2 - 2x$ непрерывна в точке $x = 1$, поэтому эту точку присоединяем к промежуткам $(1; +\infty)$ и $(-\infty; 1)$.

Ответ: возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$. ◄

Пример 3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;

2) $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5$;

3) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$;

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$.

Решение

1) Имеем: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

Исследуем знак производной методом интервалов (рис. 38.5) и учтём непрерывность функции f в точках $x = -3$ и $x = 1$. Получаем, что функция f возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -3]$ и $[1; +\infty)$ и убывает на промежутке $[-3; 1]$.

2) Имеем: $f'(x) = -3x^3 + 12x^2 - 12x = -3x(x^2 - 4x + 4) = -3x(x - 2)^2$.

Исследовав знак производной (рис. 38.6), приходим к выводу, что функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

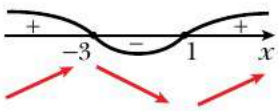


Рис. 38.5

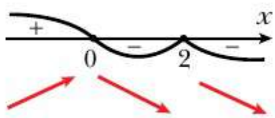


Рис. 38.6

3) Имеем: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Найдя производную функции f, получаем: $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}$.

Исследуем знак функции $y = f'(x)$ (рис. 38.7). Теперь можно сделать такой вывод: данная функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$ и $[3; +\infty)$ и убывает на каждом из промежутков $[-1; 1)$ и $(1; 3]$.

4) Имеем: $D(f) = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$. Найдём производную функции f: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 3x}\right)' = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}$. Заметим, что в точках $x = 0$ и $x = 3$ функция f не является дифференцируемой, однако является непрерывной.

Неравенство $\frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} > 0$ равносильно системе $\begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$ Решив её, получаем, что множеством решений рассматриваемого неравенства является промежуток $(3; +\infty)$.

Далее устанавливаем, что множеством решений неравенства $\frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} < 0$ является промежуток $(-\infty; 0)$.

Рис. 38.7

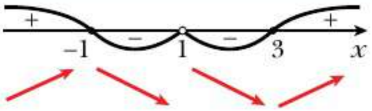
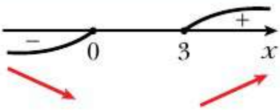


Рис. 38.8



Следовательно, если $x < 0$, то $f'(x) < 0$; если $x > 3$, то $f'(x) > 0$ (рис. 38.8).

Поэтому функция f убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[3; +\infty)$. ◄

Сформулируйте: 1) признак постоянства функции; 2) признак возрастания функции; 3) признак убывания функции.

Упражнения

38.1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
4) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
5) $f(x) = x^3 + 4x - 8$;
6) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$.

38.2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$;
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;
3) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$;
4) $f(x) = x^4 + 4x - 20$.

38.3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$;
2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;
3) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;
4) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
5) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3 - x}$;
6) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

38.4. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2 - 4$;
2) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
3) $f(x) = \frac{2x - 9}{x - 5}$;
4) $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$;
5) $f(x) = 3x + \frac{12}{x^2}$;
6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

38.5. На рисунке 38.9 изображён график производной функции f, дифференцируемой на $\boldsymbol{R}$. Укажите промежутки убывания функции f.

38.6. На рисунке 38.10 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на $\boldsymbol{R}$. Среди приведённых на рисунке 38.11 графиков укажите тот, который может быть графиком функции $y = f'(x)$.

Рис. 38.9

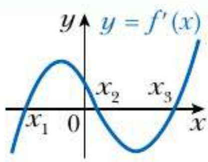


Рис. 38.10

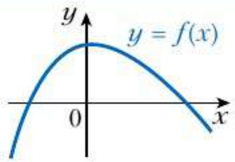
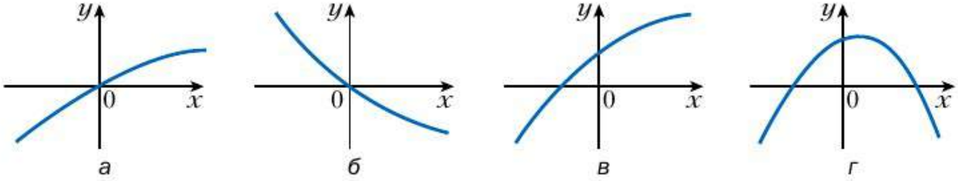


Рис. 38.11



38.7. На рисунке 38.12 изображён график производной функции f, дифференцируемой на $\boldsymbol{R}$. Укажите промежутки возрастания функции f.

38.8. На рисунке 38.13 изображены графики производных функций f, g и h, дифференцируемых на $\boldsymbol{R}$. Какая из функций f, g и h убывает на отрезке $[-1; 1]$?

38.9. На рисунке 38.14 изображены графики производных функций f, g и h, дифференцируемых на $\boldsymbol{R}$. Какая из функций f, g и h убывает на $\boldsymbol{R}$?

Рис. 38.12

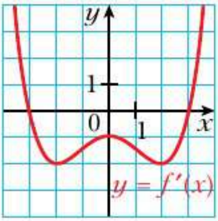


Рис. 38.13

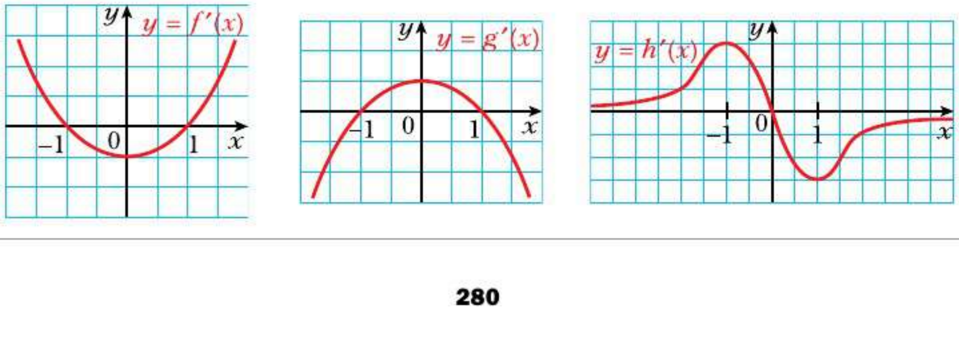
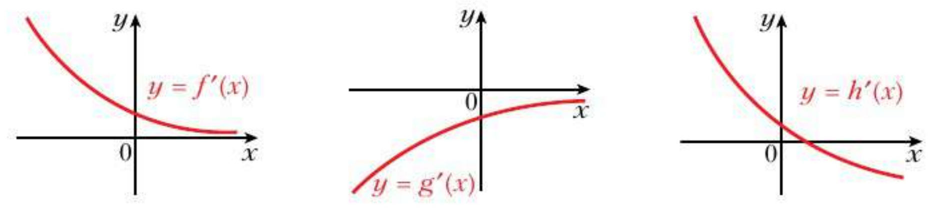


Рис. 38.14



38.10. Докажите, что функция является убывающей:

1) $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$; 2) $f(x) = \sin 2x - 3x$.

38.11. Докажите, что функция является возрастающей:

1) $f(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$; 2) $f(x) = \sin x + x^3 + x$.

38.12. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x\sqrt{2} + \sin x$; 3) $f(x) = \cos x + \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

2) $f(x) = x - \cos x$;

38.13. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = \sin x - x$; 2) $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \sin x$.

38.14. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$; 2) $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$.

38.15. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Упражнения для повторения

38.16. Решите уравнение $1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{6}{2x - 1}$.

38.17. Решите уравнение $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$.

§ 39. Точки экстремума функции

Знакомясь с такими понятиями, как предел и непрерывность функции в точке, мы исследовали поведение функции вблизи этой точки или, как принято говорить, в её **окрестности**.

Определение

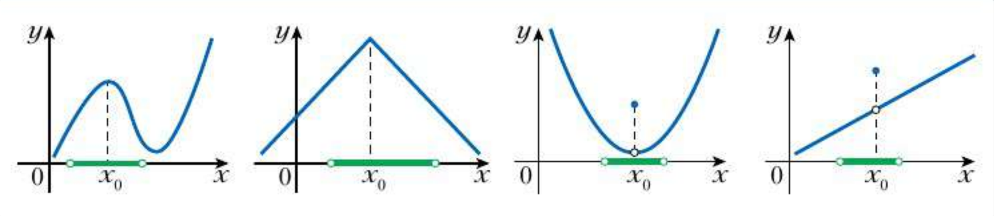
Промежуток $(a; b)$, содержащий точку x_0, называют окрестностью точки x_0.

Например, промежуток $(-1; 3)$ – одна из окрестностей точки 2,5. Вместе с тем этот промежуток не является окрестностью точки 3.

Понятно, что любая точка имеет бесконечно много окрестностей.

На рисунке 39.1 изображены графики четырёх функций. Все эти функции имеют общую особенность: существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Рис. 39.1



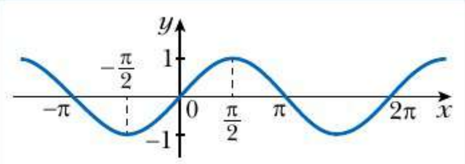
Определение

Точку x_0 называют точкой максимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Например, точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ является точкой максимума функции $y = \sin x$ (рис. 39.2). Пишут: $x_{\max} = \frac{\pi}{2}$.

На рисунке 39.1 $x_{\max} = x_0$.

Рис. 39.2



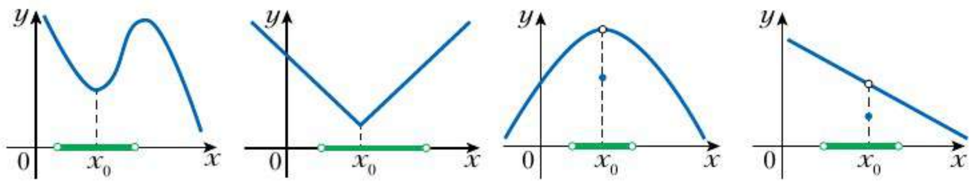
Определение

Точку x_0 называют точкой минимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Например, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ является точкой минимума функции $y = \sin x$ (см. рис. 39.2). Пишут: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунке 39.3 изображены графики функций, для которых x_0 является точкой минимума, то есть $x_{min} = x_0$.

Рис. 39.3



Точки максимума и минимума имеют общее название: их называют **точками экстремума** функции (от лат. *extremum* – крайний).

На рисунке 39.4 точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 являются точками экстремума.

Из определений точек максимума и минимума следует, что точки экстремума являются внутренними точками[1] области определения функции. Поэтому, например, точка $x_0 = 0$ не является точкой минимума функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 39.5), а точка $x_0 = 1$ не является точкой максимума функции $y = \arcsin x$ (рис. 39.6). Вместе с тем наименьшее значение функции $y = \sqrt{x}$ на промежутке $[0; +\infty)$ равно нулю, то есть $\min\limits_{[0;+\infty)} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$, а наибольшее значение функции $y = \arcsin x$ на промежутке $[-1; 1]$ равно $\frac{\pi}{2}$, то есть $\max\limits_{[-1;1]} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Рис. 39.4

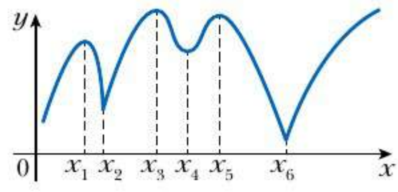


Рис. 39.5

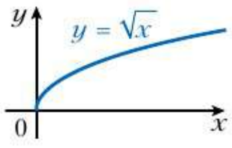
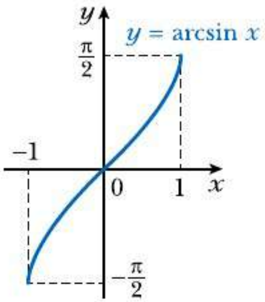


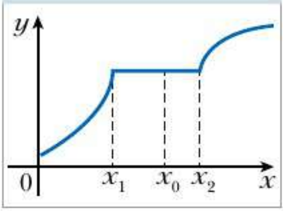
Рис. 39.6



[1] Точку $x_0 \in M \subset \boldsymbol{R}$ называют *внутренней* точкой множества M, если существует окрестность точки x_0, являющаяся подмножеством множества M.

На рисунке 39.7 изображён график функции f, которая на промежутке $[x_1; x_2]$ является константой. Точка x_1 является точкой максимума, точка x_2 – минимума, а любая точка промежутка $(x_1; x_2)$ является одновременно как точкой максимума, так и точкой минимума функции f.

Рис. 39.7



Графики функций, изображённые на рисунках 39.8 и 39.9, показывают, что точки экстремума можно разделить на два вида: те, в которых производная равна нулю (на рисунке 39.8 касательная к графику в точке с абсциссой x_0 является горизонтальной прямой), и те, в которых функция недифференцируема (см. рис. 39.9).

Рис. 39.8

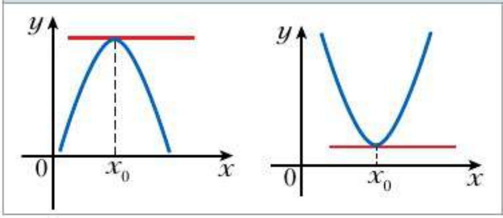
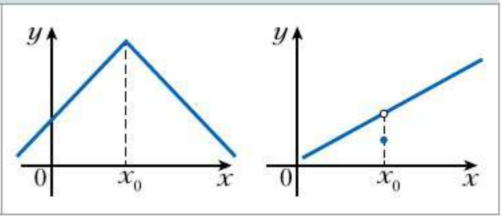


Рис. 39.9



На самом деле справедлива следующая теорема.

Теорема 39.1

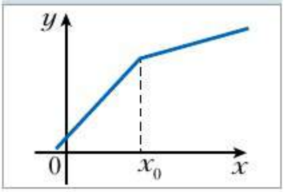
Если x_0 — точка экстремума функции f, то либо $f'(x_0) = 0$, либо функция f не является дифференцируемой в точке x_0.

Возникает вопрос: обязательно ли является точкой экстремума внутренняя точка области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует?

Ответ на этот вопрос отрицательный.

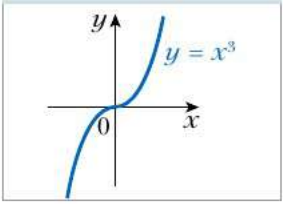
Например, на рисунке 39.10 изображён график функции, недифференцируемой в точке x_0. Однако точка x_0 не является точкой экстремума.

Рис. 39.10



Приведём ещё один пример. Для функции $f(x) = x^3$ имеем: $f'(x) = 3x^2$. Тогда $f'(0) = 0$. Однако точка $x_0 = 0$ не является точкой экстремума функции f (рис. 39.11).

Рис. 39.11



Эти примеры показывают, что теорема 39.1 даёт необходимое, но недостаточное условие существования экстремума в данной точке.

Определение

Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называют критическими точками функции.

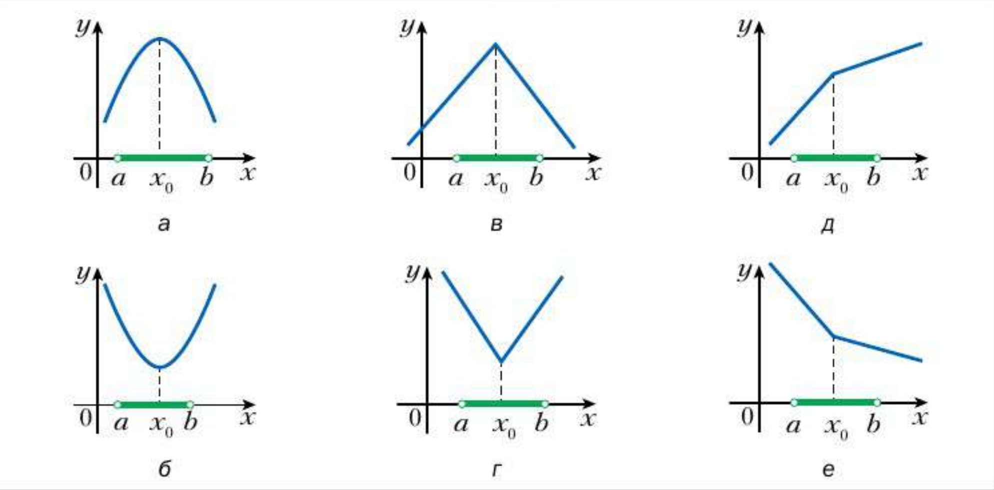
Например, точка $x_0 = 0$ является критической точкой функций $y = x^3$ и $y = |x|$; точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ является критической точкой функции $y = \sin x$.

Из сказанного выше следует, что *каждая точка экстремума функции является её критической точкой, но не каждая критическая точка является точкой экстремума*. Иными словами, *точки экстремума следует искать среди критических точек*. Этот факт проиллюстрирован на рисунке 39.12.

Рис. 39.12

На рисунке 39.13 изображены графики функций, для которых x_0 является критической точкой.

Рис. 39.13

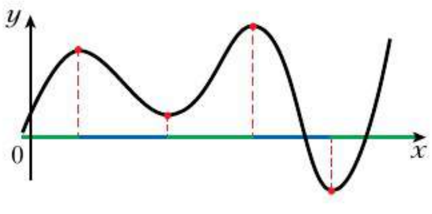


На рисунках 39.13, *а*–*г*, критическая точка x_0 является точкой экстремума, на рисунках 39.13, *д*, *е*, критическая точка x_0 не является точкой экстремума.

Наличие экстремума функции в точке x_0 связано с поведением функции в окрестности этой точки. Так, для функций, графики которых изображены на рисунках 39.13, *а–г*, имеем: функция **возрастает** (**убывает**) на промежутке $(a; x_0]$ и **убывает** (**возрастает**) на промежутке $[x_0; b)$.

Функции, графики которых изображены на рисунках 39.13, *д*, *е*, таким свойством не обладают: первая из них возрастает на каждом из промежутков $(a; x_0]$ и $[x_0; b)$, вторая убывает на этих промежутках.

Рис. 39.14



Вообще, если область определения непрерывной функции разбита на конечное количество промежутков возрастания и убывания, то легко найти все точки экстремума (рис. 39.14).

Вы знаете, что с помощью производной можно находить промежутки возрастания (убывания) дифференцируемой функции. Две теоремы, приведённые ниже, показывают, как с помощью производной можно находить точки экстремума функции.

Теорема 39.2

(признак точки максимума функции)

Пусть функция f дифференцируема на промежутке $(a; b)$ и x_0 — некоторая точка этого промежутка. Если для всех $x \in (a; x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, а для всех $x \in [x_0; b)$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 является точкой максимума функции f (см. рис. 39.13, *а*)**.**

Теорема 39.3

(признак точки минимума функции)

Пусть функция f дифференцируема на промежутке $(a; b)$ и x_0 — некоторая точка этого промежутка. Если для всех $x \in (a; x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, а для всех $x \in [x_0; b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 является точкой минимума функции f (см. рис. 39.13, *б*)**.**

Иногда удобно пользоваться упрощёнными формулировками этих двух теорем: *если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума*; *если производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума*.

Итак, для функции f точки экстремума можно искать по такой схеме:

1) Найти $f'(x)$.

2) Исследовать знак производной в окрестностях критических точек.

3) Пользуясь соответствующими теоремами, для каждой критической точки выяснить, является ли она точкой экстремума.

<u>**Пример.**</u> Найдите точки экстремума функции: 1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; 2) $f(x) = 2x^2 - x^4$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$; 4) $f(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x}}$.

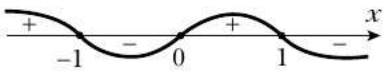
Решение. 1) Имеем: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$. Методом интервалов исследуем знак производной в окрестностях критических точек $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (рис. 39.15). Получаем: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 2$.

2) $f'(x) = 4x - 4x^3 = -4x(x^2 - 1) = -4x(x + 1)(x - 1)$.

Исследовав знак производной (рис. 39.16), получаем: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 0$ и $x_{max} = 1$.

Рис. 39.15

Рис. 39.16



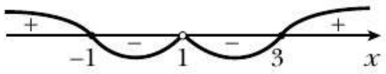
3) Имеем: $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 4)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} =$

$= \dfrac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \dfrac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}$.

Исследуем знак производной в окрестностях критических точек $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ (рис. 39.17). Получаем: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 3$.

Рис. 39.17



4) Имеем:

$$f'(x) = \frac{(x + 2)' \cdot \sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\right)' \cdot (x + 2)}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x + 2)}{x} = \frac{2x - (x + 2)}{2x\sqrt{x}} = \frac{x - 2}{2x\sqrt{x}}.$$

Если $0 < x \leqslant 2$, то $f'(x) \leqslant 0$; если $x \geqslant 2$, то $f'(x) \geqslant 0$. Следовательно, критическая точка $x = 2$ является точкой минимума, то есть $x_{min} = 2$. ◄

1. Какой промежуток называют окрестностью точки x_0?
2. Какую точку называют точкой максимума функции; точкой минимума функции?

3. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.

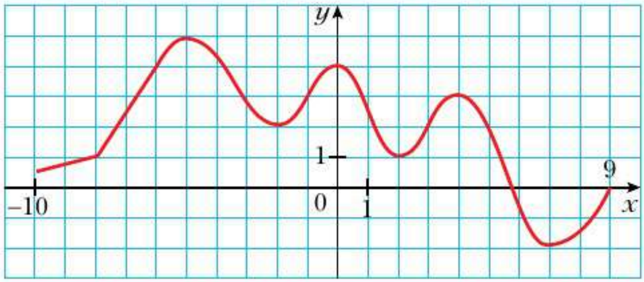
4. Какую точку называют критической точкой функции?

5. Сформулируйте признак точки максимума; точки минимума.

Упражнения

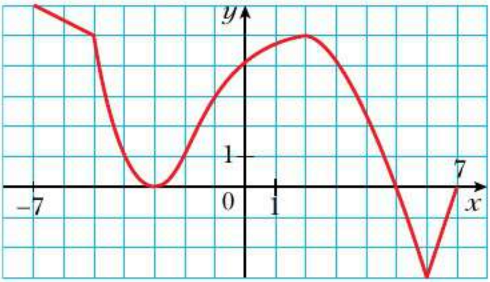
39.1. На рисунке 39.18 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-10; 9]$. Укажите: 1) критические точки функции; 2) точки минимума; 3) точки максимума.

Рис. 39.18



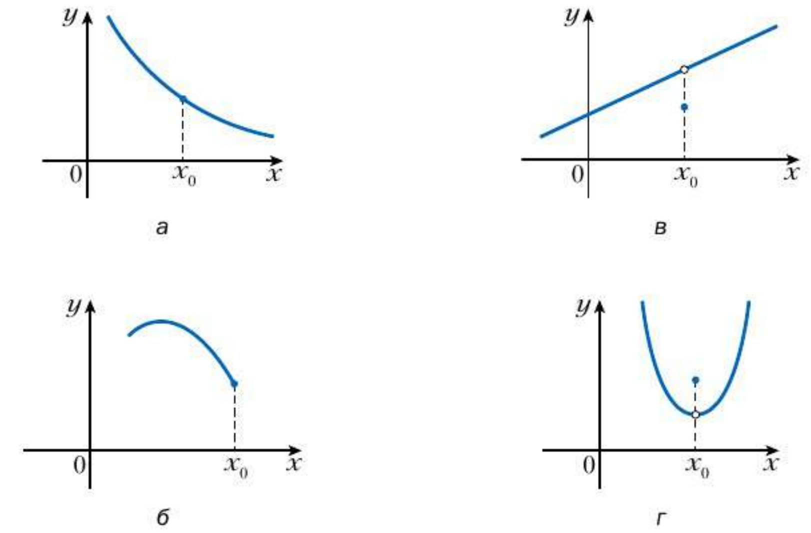
39.2. На рисунке 39.19 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-7; 7]$. Укажите: 1) критические точки функции; 2) точки минимума; 3) точки максимума.

Рис. 39.19



39.3. На рисунке 39.20 укажите график функции, для которой точка x_0 является точкой минимума.

Рис. 39.20



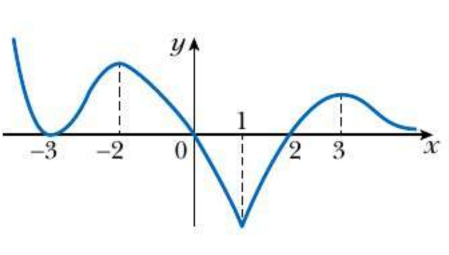
39.4. Имеет ли критические точки функция:

1) $f(x) = x$;
2) $f(x) = x^5 + 1$;
3) $f(x) = 5$;
4) $f(x) = \sin x$;
5) $f(x) = \operatorname{tg} x$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$?

39.5. На рисунке 39.21 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Верно ли равенство:

1) $f'(-3) = 0$;
2) $f'(-2) = 0$;
3) $f'(0) = 0$;
4) $f'(1) = 0$;
5) $f'(2) = 0$;
6) $f'(3) = 0$?

Рис. 39.21



39.6. Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = 0{,}5x^4$;
2) $f(x) = x^2 - 6x$;
3) $f(x) = 12x - x^3$;
4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$;
5) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$;
6) $f(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{2}$.

39.7. Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$;

2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;

3) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;

4) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$;

5) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$;

6) $f(x) = 2 + x^2 + 2x^3 - 2x^4$.

39.8. Функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве действительных чисел. На рисунке 39.22 изображён график её производной. Укажите точки максимума и минимума функции $y = f(x)$.

39.9. Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке 39.23 изображён график функции $y = f'(x)$. Сколько точек экстремума имеет функция $y = f(x)$?

Рис. 39.22

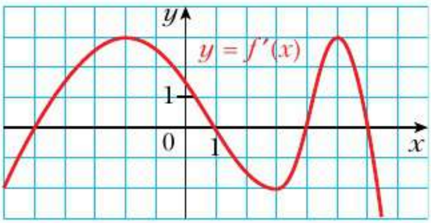
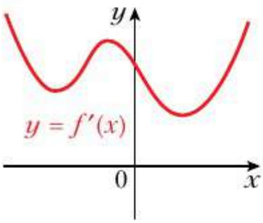


Рис. 39.23



39.10. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7$;

2) $f(x) = (x - 1)^3(x - 2)^2$;

3) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{5}x^5 + x^4 + 3$.

39.11. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 9$;

2) $f(x) = (x + 4)^4(x - 3)^3$.

39.12. Докажите, что данная функция не имеет точек экстремума:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 10$;

2) $f(x) = \sin x - x$.

39.13. Докажите, что данная функция не имеет точек экстремума:

1) $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 20$;

2) $f(x) = \cos x + x$.

39.14. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$;
2) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;
4) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2}$;
5) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$;
6) $f(x) = -\frac{1}{(x - 3)^2}$;
7) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16}$;
8) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

39.15. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$;
2) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
3) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$;
4) $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$;
5) $f(x) = \frac{1}{16 - x^2}$;
6) $f(x) = 2x - \sqrt{x}$.

39.16. Верно ли утверждение:

1) значение функции в точке максимума может быть меньше значения функции в точке минимума;
2) функция в точке экстремума может быть недифференцируемой;
3) если производная в некоторой точке равна нулю, то эта точка является точкой экстремума функции?

39.17. Верно ли утверждение:

1) в точке экстремума производная функции равна нулю;
2) если функция в некоторой точке недифференцируема, то эта точка является точкой экстремума функции?

39.18. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$;
2) $f(x) = \cos 2x - x\sqrt{3}$.

39.19. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \cos x + \frac{x}{2}$;
2) $f(x) = \sin 2x - x\sqrt{2}$.

39.20. При каких значениях a функция $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$ имеет только одну критическую точку?

39.21. При каких значениях a функция $y = \frac{1}{3}x^3 - 2ax^2 + 4x - 15$ имеет только одну критическую точку?

39.22. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x^2\sqrt{1-x}$;
3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;
2) $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$;
4) $f(x) = \dfrac{2x-7}{\sqrt{3-x}}$.

39.23. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x^2\sqrt{x+2}$;
2) $f(x) = (x-2)^2\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x-1}}$.

Готовимся к изучению новой темы

39.24. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 18x + 2$ на отрезке:
1) $[-1; 4]$;
2) $[-4; 1]$;
3) $[4; 5]$.

39.25. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 - 8x + 10$ на отрезке:
1) $[-5; -3]$;
2) $[-1; 0]$;
3) $[-11; -10]$.

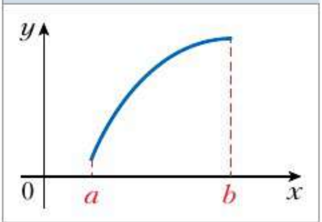
§ 40. Применение производной при нахождении наибольшего и наименьшего значений функции

Какое количество продукции должно выпустить предприятие, чтобы получить наибольшую прибыль? Как, имея ограниченные ресурсы, выполнить производственное задание в кратчайшее время? Как организовать доставку товара на автомобиле по торговым точкам так, чтобы расход топлива был наименьшим?

Такие и подобные задачи на поиск наилучшего, или, как говорят, оптимального, решения занимают значительное место в практической деятельности человека.

Представим, что известна функция, которая описывает, например, зависимость прибыли предприятия от количества изготовленной продукции. Тогда задача сводится к поиску аргумента, при котором функция принимает наибольшее значение.

Рис. 40.1



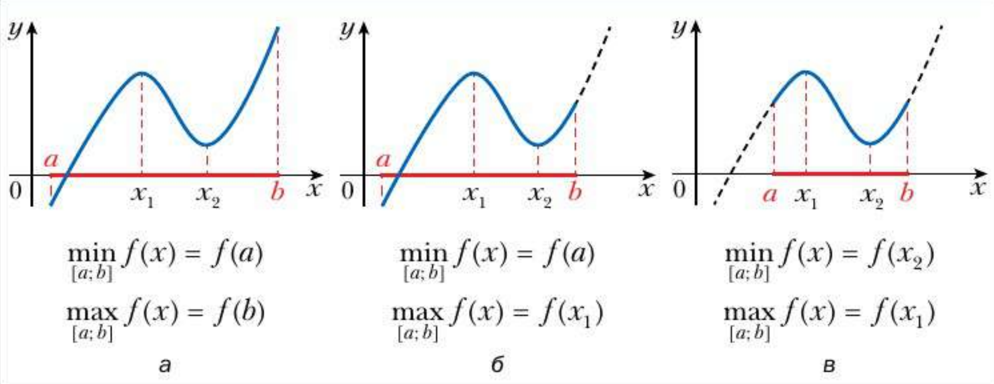
В этом параграфе мы выясним, как можно найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $[a; b]$. Ограничимся рассмотрением только непрерывных функций.

Заметим, что точка, в которой функция принимает своё наименьшее значение, не обязательно является точкой минимума. Например, на рисунке 40.1 $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$, а точек минимума функция f не имеет. Также точка минимума не обязательно является точкой, в которой функция принимает наименьшее значение. На рисунке 40.2, a, точка x_2 – единственная точка минимума, а наименьшее значение $\min\limits_{[a;\, b]} f(x)$ достигается в точке a.

Аналогичное замечание относится к точкам максимума и точкам, в которых функция принимает наибольшее значение.

На рисунке 40.2 представлены разные случаи расположения точек экстремумов и точек, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

Рис. 40.2



Здесь важно понять, что свойство функции иметь точку экстремума x_0 означает следующее: функция принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение по сравнению со значениями функции во всех точках некоторой, возможно, очень малой окрестности точки x_0. Поэтому если хотят подчеркнуть этот факт, то точки экстремума ещё называют **точками локального максимума** или **точками локального минимума** (от лат. *locus* – место).

Непрерывная на промежутке $[a;\, b]$ функция достигает на этом промежутке свои наибольшее и наименьшее значения или на концах отрезка, или в точках экстремума (см. рис. 40.2).

Тогда для такой функции поиск наибольшего и наименьшего значений на промежутке $[a;\, b]$ можно проводить, пользуясь следующей схемой:

1. Найти критические точки функции f, принадлежащие промежутку $[a;\, b]$.

2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах рассматриваемого отрезка.

3. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Этот алгоритм можно реализовать только тогда, когда рассматриваемая функция f имеет конечное количество критических точек на промежутке $[a; b]$.

Отметим, что если определить, какие из критических точек являются точками экстремума, то количество точек, в которых следует искать значения функции, можно уменьшить. Однако выявление точек экстремума, как правило, требует большей вычислительной работы, чем поиск значений функции в критических точках.

Пример 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ на промежутке $[-2; 0]$.

Решение. Найдём критические точки данной функции. Имеем:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12.$$

Теперь решим уравнение

$$12x^2 - 18x - 12 = 0. \text{ Отсюда}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \text{ или } x = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, функция f имеет две критические точки, а промежутку $[-2; 0]$ принадлежит одна: $x = -\frac{1}{2}$.

Имеем: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $f(-2) = -38$, $f(0) = 6$.

Следовательно, $\max\limits_{[-2;0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = -38$.

Ответ: $\frac{37}{4}$; -38. ◄

Пример 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4\sin 2x - 2\sin 4x$ на промежутке $[0; \pi]$.

Решение. Имеем: $f'(x) = 8\cos 2x - 8\cos 4x = 8(\cos 2x - \cos 4x) = 16\sin 3x \sin x$. Найдём критические точки данной функции:

$$\sin 3x \sin x = 0;$$

$$\sin 3x = 0 \text{ или } \sin x = 0;$$

$$x = \frac{\pi k}{3} \text{ или } x = \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Отсюда $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Следовательно, точки вида $x = \frac{\pi k}{3}$ являются критическими точками функции f. Из них промежутку $[0; \pi]$ принадлежат четыре точки: 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π. Имеем:

$$f(0) = f(\pi) = 0, \; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}, \; f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}.$$

Таким образом, $\max\limits_{[0;\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$, $\min\limits_{[0;\pi]} f(x) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$; $-3\sqrt{3}$. ◄

Пример 3. Представьте число 8 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы сумма куба первого числа и квадрата второго числа была наименьшей.

Решение. Пусть первое число равно x, тогда второе число равно $8 - x$. Из условия следует, что $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + (8 - x)^2$, определённую на промежутке $[0; 8]$, и найдём, при каком значении x она принимает наименьшее значение.

Имеем: $f'(x) = 3x^2 - 2(8 - x) = 3x^2 + 2x - 16$. Найдём критические точки функции f. Для этого решим уравнение:

$$3x^2 + 2x - 16 = 0. \text{ Отсюда}$$

$$x = 2 \text{ или } x = -\frac{8}{3}.$$

Среди найденных чисел промежутку $[0; 8]$ принадлежит только число 2. Имеем:

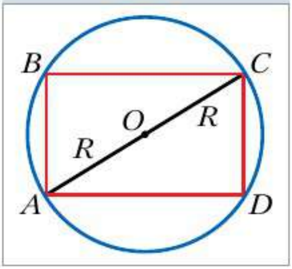
$$f(2) = 44, \; f(0) = 64, \; f(8) = 512.$$

Следовательно, функция f принимает наименьшее значение при $x = 2$.

Ответ: $8 = 2 + 6$. ◄

Пример 4. Найдите стороны прямоугольника, вписанного в окружность радиуса R, если площадь прямоугольника принимает наибольшее значение.

Рис. 40.3



Решение. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, вписанный в окружность радиуса R (рис. 40.3). Пусть $AB = x$, тогда $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Отсюда площадь прямоугольника $ABCD$ равна $x\sqrt{4R^2 - x^2}$. Из условия задачи следует, что значения переменной x удовлетворяют неравенству $0 < x < 2R$, то есть принадлежат промежутку $(0;\ 2R)$. Таким образом, задача свелась к нахождению наибольшего значения функции $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на промежутке $(0;\ 2R)$. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $D(f) = [0;\ 2R]$, и будем искать её наибольшее значение на промежутке $[0;\ 2R]$.

Найдём критические точки функции f:

$$f'(x) = (x)' \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} \cdot (4R^2 - x^2)' =$$

$$= \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{(4R^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

С учётом области определения функции f получаем, что эта функция имеет одну критическую точку $x = R\sqrt{2}$.

Имеем: $f\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2$, $f(0) = f(2R) = 0$. Следовательно, $\max\limits_{[0;2R]} f(x) = f\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2$.

Отсюда получаем, что функция $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на промежутке $(0;\ 2R)$ принимает наибольшее значение при $x = R\sqrt{2}$. Тогда $AB = R\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$.

Следовательно, среди прямоугольников, вписанных в окружность радиуса R, наибольшую площадь имеет квадрат со стороной $R\sqrt{2}$. ◄

? Опишите, как найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на промежутке $[a;\ b]$.

Упражнения

40.1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1;\ 3]$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[0;\ 2]$;
3) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$, $[-1;\ 4]$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x - 1}$, $[-3;\ 0]$.

40.2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x$, $[0;\ 3]$;
2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2$, $[-2;\ 0]$;
3) $f(x) = 2x^4 - 8x$, $[-2;\ 1]$;
4) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 8x^2$, $[-1;\ 2]$.

40.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6; 8]$;

2) $f(x) = \sqrt{0{,}5x^2 + 3x + 5}$, $[2; 4]$;

3) $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)^2$, $[-2; 4]$;

4) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}$, $[-4; -1]$.

40.4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = \sqrt{9 + 8x - x^2}$, $[0; 7]$;

2) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$, $[-2; 4]$;

3) $f(x) = (x - 1)^2(x + 5)^2$, $[-3; 2]$;

4) $f(x) = -x - \dfrac{9}{x}$, $[-6; -1]$.

40.5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = \sin x - \cos x$, $[0; \pi]$;

2) $f(x) = \sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$;

3) $f(x) = x\sqrt{3} - \cos 2x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

40.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, $[0; \pi]$;

2) $f(x) = 2\cos\left(4x + \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left[-\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

40.7. Представьте число 8 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы произведение куба одного из этих чисел на второе число было наибольшим.

40.8. Представьте число 12 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы произведение квадрата одного из этих чисел на удвоенное второе число было наибольшим.

40.9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = 2\sin 2x + \cos 4x$, $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$;

2) $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 5$, $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$;

3) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

40.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном промежутке:

1) $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $f(x) = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

40.11. Представьте число 180 в виде суммы трёх неотрицательных слагаемых так, чтобы два из них относились как 1 : 2, а произведение всех трёх слагаемых было наибольшим.

40.12. Представьте число 18 в виде суммы трёх неотрицательных чисел так, чтобы два из них относились как 8 : 3, а сумма кубов этих трёх чисел была наименьшей.

40.13. В треугольник ABC вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на стороне AC, а две другие — на сторонах AB и BC. Найдите наибольшее значение площади такого прямоугольника, если $AC = 12$ см, $BD = 10$ см, где BD — высота треугольника ABC.

40.14. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 см и острым углом 30° вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах. Какими должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

40.15. В полукруг радиуса 20 см вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите стороны прямоугольника.

40.16. В полукруг радиуса 6 см вписан прямоугольник наибольшего периметра. Найдите стороны прямоугольника.

40.17. Две вершины прямоугольника принадлежат графику функции $y = 12 - x^2$, $D(y) = \left[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right]$, а две другие — оси абсцисс. Какую наибольшую площадь может иметь такой прямоугольник?

40.18. Две вершины прямоугольника принадлежат графику функции $y = 0{,}5x^2$, $D(y) = \left[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$, а две другие — прямой $y = 9$. Какую наибольшую площадь может иметь такой прямоугольник?

40.19. Периметр равнобедренного треугольника равен 48 см. Какой должна быть длина основания треугольника, чтобы его площадь принимала наибольшее возможное значение?

Готовимся к изучению новой темы

40.20. Начертите график какой-нибудь непрерывной функции такой, что: областью определения является промежуток $[-4; 3]$; областью значений является промежуток $[-5; 3]$; нули функции равны -2 и 2; функция убывает на каждом из промежутков $[-4; -1]$ и $[2; 3]$, возрастает на промежутке $[-1; 2]$.

40.21. Начертите график какой-нибудь дифференцируемой функции такой, что: областью определения является промежуток $[-3; 4]$; областью значений является промежуток $[-2; 3]$; нули функции равны -1 и 2; $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $[-3; 0)$ и $(2; 4]$; $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(0; 2)$.

§ 41. Построение графиков функций

Когда в предыдущих классах вам приходилось строить графики, вы, как правило, поступали так: отмечали на координатной плоскости некоторое количество точек, принадлежащих графику, а затем соединяли их. Точность построения зависела от количества отмеченных точек.

На рисунке 41.1 изображено несколько точек, принадлежащих графику некоторой функции $y = f(x)$. Эти точки можно соединить по-разному, например так, как показано на рисунках 41.2 и 41.3.

Рис. 41.1

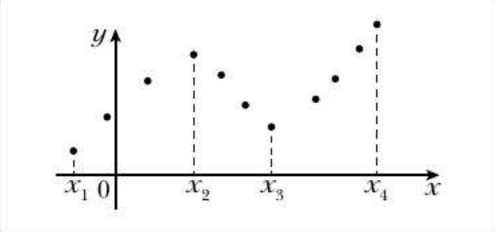
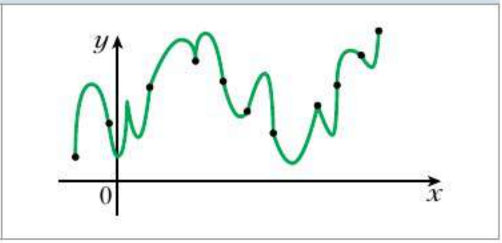


Рис. 41.2



Однако если знать, что функция f возрастает на каждом из промежутков $[x_1; x_2]$ и $[x_3; x_4]$, убывает на промежутке $[x_2; x_3]$ и является дифференцируемой, то, скорее всего, будет построен график, показанный на рисунке 41.4.

Рис. 41.3

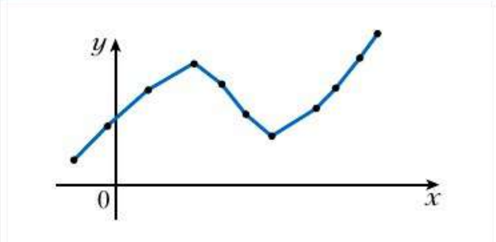
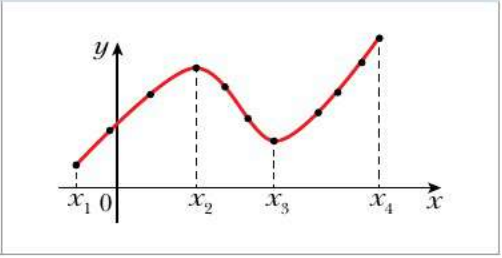


Рис. 41.4



Вы знаете, какими особенностями обладают графики чётной, нечётной, периодической функций и т. д. Вообще, чем больше свойств функции удаётся определить, тем точнее можно построить её график.

Исследование свойств функции будем проводить по такому плану:

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на чётность.

3. Найти нули функции.

4. Найти промежутки знакопостоянства функции.

5. Найти промежутки возрастания и убывания функции.

6. Найти точки экстремума и значения функции в точках экстремума.

7. Выявить другие особенности функции (периодичность функции, поведение функции в окрестностях отдельных важных точек и т. п.).

Заметим, что приведённый план исследования носит рекомендательный характер и не является постоянным и исчерпывающим. Важно при исследовании функции обнаружить такие её свойства, которые позволят корректно построить график.

Пример 1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ и постройте её график.

Решение. 1. Функция определена на множестве действительных чисел, то есть $D(f) = \boldsymbol{R}$.

2. Имеем: $f(-x) = \frac{3}{2}(-x)^2 - \frac{1}{4}(-x)^3 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$. Отсюда $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то есть функция $y = f(-x)$ не совпадает ни с функцией $y = f(x)$, ни с функцией $y = -f(x)$. Таким образом, данная функция не является ни чётной, ни нечётной.

3–4. Имеем: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{x^2}{4}(6 - x)$. Числа 0 и 6 являются нулями функции f. Применив метод интервалов (рис. 41.5), находим промежутки знакопостоянства функции f, а именно: устанавливаем, что $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (6; +\infty)$.

Рис. 41.5

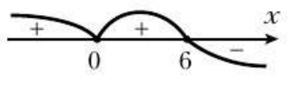
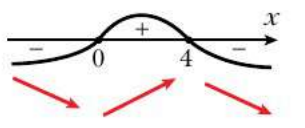


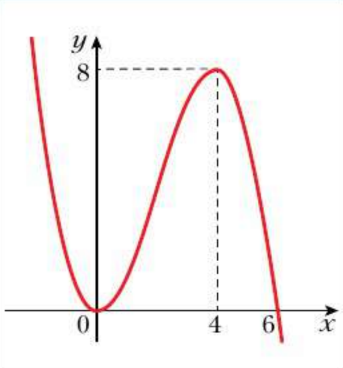
Рис. 41.6



5–6. Имеем: $f'(x) = 3x - \frac{3x^2}{4} = \frac{3x}{4}(4 - x)$. Исследовав знак производной (рис. 41.6), приходим к выводу, что функция f возрастает на промежутке $[0; 4]$, убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0]$ и $[4; +\infty)$. Поэтому $x_{max} = 4$, $x_{min} = 0$. Имеем: $f(4) = 8$, $f(0) = 0$.

Учитывая полученные результаты, строим график функции (рис. 41.7). ◄

Рис. 41.7



Пример 2. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}$ и постройте её график.

Решение. 1. Функция определена на множестве $(-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup \cup (0; +\infty)$.

2. Область определения функции несимметрична относительно начала координат, следовательно, данная функция не является ни чётной, ни нечётной.

3. Функция не имеет нулей.

4. Имеем: $f(x) = \frac{4}{x(x+4)}$. Отсюда $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-4; 0)$ (рис. 41.8).

5–6. Имеем: $f'(x) = \frac{(4)' \cdot (x^2 + 4x) - 4 \cdot (x^2 + 4x)'}{x^2(x+4)^2} = -\frac{4(2x+4)}{x^2(x+4)^2} = -\frac{8(x+2)}{x^2(x+4)^2}$.

Исследовав знак f' (рис. 41.9), приходим к выводу, что функция f убывает на каждом из промежутков $[-2; 0)$ и $(0; +\infty)$, возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -4)$ и $(-4; -2]$, $x_{max} = -2$, $f(-2) = -1$.

Рис. 41.8

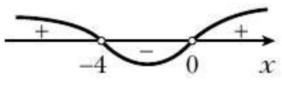
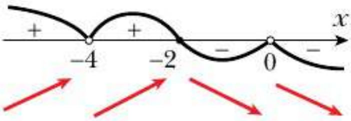


Рис. 41.9



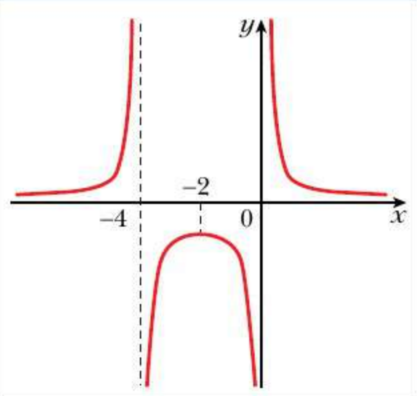
7. Заметим, что если значения аргумента x выбирать всё бóльшими и бóльшими, то соответствующие значения функции $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}$ всё меньше и меньше отличаются от числа 0 и могут стать сколь угодно малы-

ми. Это свойство принято записывать так: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2+4x}=0$ или так: $\dfrac{4}{x^2+4x}\to 0$ при $x\to+\infty$. В этом случае прямую $y=0$ называют *горизонтальной асимптотой* графика функции f при $x\to+\infty$. Аналогично можно установить, что прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции f при $x\to-\infty$.

Если значения аргумента x стремятся к нулю, оставаясь положительными, то соответствующие значения функции $f(x)=\dfrac{4}{x^2+4x}$ становятся всё бо́льшими и бо́льшими и могут стать бо́льшими произвольного наперёд заданного положительного числа. В этом случае прямую $x=0$ называют *вертикальной асимптотой* графика функции f, когда x стремится к нулю справа. Прямая $x=0$ также является вертикальной асимптотой графика функции f, когда x стремится к нулю слева. Функция f имеет ещё одну вертикальную асимптоту – прямую $x=-4$, когда x стремится к -4 как слева, так и справа.

Учитывая полученные результаты, строим график функции f (рис. 41.10). ◄

Рис. 41.10



Опишите план исследования свойств функции.

Упражнения

41.1. Исследуйте данную функцию и постройте её график:

1) $f(x)=3x-x^3-2$;
2) $f(x)=2x^3-3x^2+5$;
3) $f(x)=3x-\dfrac{x^3}{9}$;
4) $f(x)=x^3-3x^2+2$;
5) $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-x^3$;
6) $f(x)=x^4-2x^2+1$;
7) $f(x)=(x+3)^2(x-1)^2$.

41.2. Исследуйте данную функцию и постройте её график:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;
2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = x - x^3$;
4) $f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2$;
5) $f(x) = 8x^2 - 7 - x^4$.

41.3. Постройте график функции:

1) $f(x) = \frac{4 - x}{x + 2}$;
2) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$;
3) $f(x) = \frac{6x - 6}{x^2 + 3}$;
4) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$;
5) $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$;
6) $f(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}$;
7) $f(x) = \frac{2(x - 1)}{x^2}$;
8) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$.

41.4. Постройте график функции:

1) $f(x) = \frac{x - 3}{x - 1}$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$;
3) $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$;
4) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;
5) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$;
6) $f(x) = \frac{2x}{(x + 1)^2}$.

Когда сделаны уроки

Вторая производная

Пусть материальная точка движется по закону $y = s(t)$ по координатной прямой. Тогда мгновенная скорость $v(t)$ в момент времени t определяется по формуле

$$v(t) = s'(t).$$

Рассмотрим функцию $y = v(t)$. Её производную в момент времени t называют ускорением движения и обозначают $a(t)$, то есть

$$a(t) = v'(t).$$

Таким образом, функция ускорение движения — это производная функции скорость движения, которая, в свою очередь, является производной функции закон движения, то есть

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))'.$$

В таких случаях говорят, что функция ускорение движения $y = a(t)$ является **второй производной функции** $y = s(t)$. Пишут:

$$a(t) = s''(t)$$

(запись $s''(t)$ читают: «эс два штриха от тэ»).

Например, если закон движения материальной точки задан формулой $s(t) = t^2 - 4t$, то имеем:

$$s'(t) = v(t) = 2t - 4;$$
$$s''(t) = v'(t) = a(t) = 2.$$

Мы получили, что материальная точка движется с постоянным ускорением. Как вы знаете из курса физики, такое движение называют равноускоренным.

Обобщим сказанное.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, дифференцируемую на некотором множестве M. Тогда её производная также является некоторой функцией, заданной на этом множестве. Если функция f' дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in M$, то производную функции f' в точке x_0 называют **второй производной функции** $y = f(x)$ **в точке** x_0 и обозначают $f''(x_0)$ или $y''(x_0)$. Саму функцию f называют **дважды дифференцируемой в точке** x_0.

Функцию, которая числу x_0 ставит в соответствие число $f''(x_0)$, называют **второй производной функции** $y = f(x)$ и обозначают f'' или y''.

Например, если $y = \sin x$, то $y'' = -\sin x$.

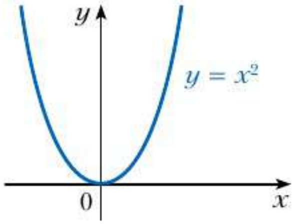
Если функция f дважды дифференцируема в каждой точке множества M, то её называют **дважды дифференцируемой на множестве** M. Если функция f дважды дифференцируема на $D(f)$, то её называют **дважды дифференцируемой**.

Вы знаете, что функцию характеризуют такие свойства, как чётность (нечётность), периодичность, возрастание (убывание) и т. д. Ещё одной важной характеристикой функции является выпуклость вверх и выпуклость вниз.

Обратимся к примерам.

О функциях $y = x^2$, $y = |x|$ говорят, что они являются выпуклыми вниз (рис. 41.11), а функции $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$ являются выпуклыми вверх

Рис. 41.11



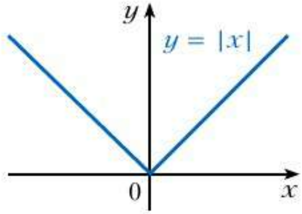


Рис. 41.12

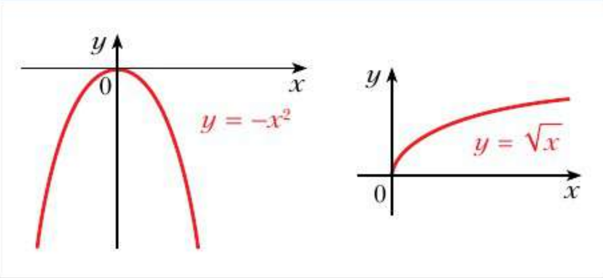
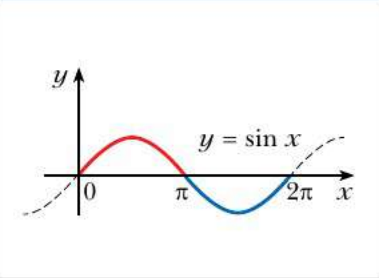


Рис. 41.13



(рис. 41.12). Функция $y = \sin x$ является выпуклой вверх на промежутке $[0; \pi]$ и выпуклой вниз на промежутке $[\pi; 2\pi]$ (рис. 41.13). Линейную функцию считают как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз.

Далее, изучая понятия выпуклости функции на промежутке I, ограничимся случаем, когда функция f дифференцируема[1] на этом промежутке.

Пусть функция f дифференцируема на промежутке I. Тогда в любой точке её графика с абсциссой $x \in I$ можно провести невертикальную касательную. Если при этом график функции на промежутке I расположен не выше любой такой касательной (рис. 41.14), то функцию f называют **выпуклой вверх на промежутке** I; если же график на промежутке I расположен не ниже любой такой касательной (рис. 41.15), то функцию f называют **выпуклой вниз на промежутке** I.

На рисунке 41.16 изображён график функции f, которая является выпуклой вниз на промежутке $[a; b]$. Из рисунка видно, что с увеличением аргумента x угол наклона соответствующей касательной увеличивается. Это означает, что функция f' возрастает на промежутке $[a; b]$.

Рис. 41.14

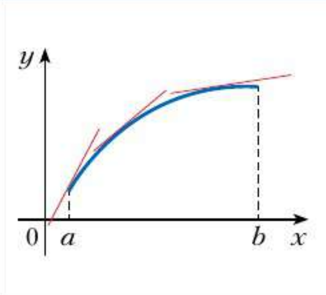


Рис. 41.15

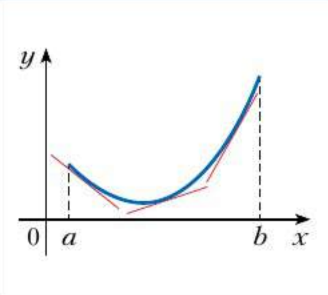
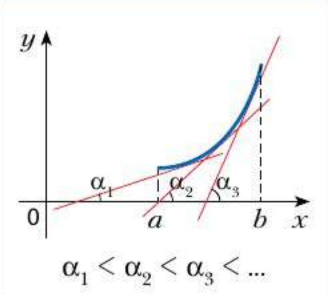


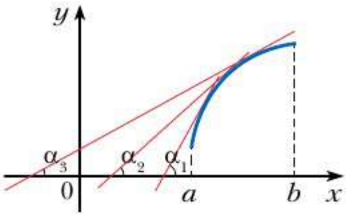
Рис. 41.16



[1] В высшей школе понятие выпуклости распространяют и на более широкие классы функций, например непрерывные.

Пусть функция f является выпуклой вверх на промежутке $[a; b]$ (рис. 41.17). Из рисунка видно, что с увеличением аргумента x угол наклона соответствующей касательной уменьшается. Это означает, что функция f' убывает на промежутке $[a; b]$.

Рис. 41.17



$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots$

Эти примеры показывают, что характер выпуклости функции f на некотором промежутке I связан с возрастанием (убыванием) функции f' на этом промежутке.

Для дважды дифференцируемой на промежутке I функции f возрастание (убывание) функции f' определяется знаком второй производной функции f на промежутке I. Таким образом, характер выпуклости дважды дифференцируемой функции связан со знаком её второй производной.

Эту связь устанавливают следующие две теоремы.

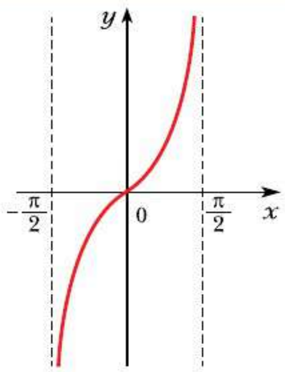
Теорема 1
(признак выпуклости функции вниз)

Если для всех $x \in I$ выполняется неравенство $f''(x) \geqslant 0$, то функция f является выпуклой вниз на промежутке I.

Теорема 2
(признак выпуклости функции вверх)

Если для всех $x \in I$ выполняется неравенство $f''(x) \leqslant 0$, то функция f является выпуклой вверх на промежутке I.

Рис. 41.18



Пример. Исследуйте на выпуклость функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Имеем: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Отсюда

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = (\cos^{-2} x)' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Неравенство $f''(x) \geqslant 0$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$ является выпуклой вниз на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 41.18).

Неравенство $f''(x) \leqslant 0$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется при $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$ является выпуклой вверх на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ (см. рис. 41.18). ◄

Упражнения

1. Найдите вторую производную функции:

1) $y = x^3$;
2) $y = x^2 - 2x + 5$;
3) $y = \frac{1}{x}$;
4) $y = \sqrt{x}$;
5) $y = \cos x$;
6) $y = (2x - 1)^5$;
7) $y = \sin 3x$;
8) $y = \cos^2 x$;
9) $y = \sin \frac{x}{4}$;
10) $y = x \sin x$.

2. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите её ускорение в момент времени $t_0 = 2$ с.

3. Исследуйте на выпуклость функцию:

1) $y = x^3 - 3x + 2$;
2) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1$.

4. Докажите, что функция $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 11x - 7$ является выпуклой вниз на $\boldsymbol{R}$.

Когда сделаны уроки

Применение производной для решения уравнений и доказательства неравенств

В рассказе «Применение свойств функций» вы познакомились с приёмами решения уравнений и неравенств, основанными на свойствах функций. Использование производной существенно расширяет класс задач подобного рода. Продемонстрируем сказанное на примерах.

Пример 1. Решите уравнение $4x^3 - 9x^4 - \sqrt{1 - 3x} + 15 = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 4x^3 - 9x^4 - \sqrt{1 - 3x} + 15$, $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. Для всех $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ имеем: $f'(x) = 12x^2 - 36x^3 + \frac{3}{2\sqrt{1 - 3x}} =$

$= 12x^2(1-3x) + \dfrac{3}{2\sqrt{1-3x}}$. Очевидно, что $f'(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$, то есть функция f возрастает на промежутке $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$. Поскольку функция f непрерывна в точке $x = \dfrac{1}{3}$, то эта функция возрастает на $D(f) = \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right]$. Тогда функция f принимает каждое своё значение только один раз, а следовательно, уравнение $f(x) = 0$ не может иметь более одного корня.

Нетрудно заметить, что $f(-1) = 0$. Тогда $x = -1$ является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: -1. ◄

Пример 2. Докажите, что для всех $x > -1$ выполняется неравенство $x^9 + 4x + 3 > 2x^5$.

Решение. Докажем, что для всех $x > -1$ выполняется неравенство $x^9 - 2x^5 + 4x + 3 > 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^9 - 2x^5 + 4x + 3$. Так как $f(-1) = 0$, то доказываемое неравенство можно представить в виде $f(x) > f(-1)$, где $x \in (-1; +\infty)$. Имеем: $f'(x) = 9x^8 - 10x^4 + 4$. Поскольку квадратный трёхчлен $9t^2 - 10t + 4$ имеет отрицательный дискриминант, то неравенство $9t^2 - 10t + 4 > 0$ выполняется для всех $t \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, $f'(x) > 0$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Поэтому функция f возрастающая. Отсюда для любого $x \in (-1; +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) > f(-1)$. ◄

Пример 3. Докажите, что для всех $x > 0$ выполняется неравенство $x > \sin x$.

Решение. При $x \geqslant 1$ доказываемое неравенство очевидно.

Пусть $0 < x < 1$. Рассмотрим функцию $f(x) = x - \sin x$. Поскольку $f(0) = 0$, то достаточно доказать, что $f(x) > f(0)$ при $0 < x < 1$. Имеем: $f'(x) = 1 - \cos x$. Так как при всех $0 < x < 1$ выполняется неравенство $1 - \cos x > 0$, то $f'(x) > 0$ при всех $0 < x < 1$. Следовательно, функция f возрастает на промежутке $(0; 1)$. Поскольку функция f непрерывна в точке $x = 0$, то эта функция возрастает на промежутке $[0; 1)$. Следовательно, при $0 < x < 1$ выполняется неравенство $f(x) > f(0)$. ◄

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2(x^2 - y^2) = \cos 2y - \cos 2x, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$

Решение. Запишем: $\begin{cases} 2x^2 + \cos 2x = 2y^2 + \cos 2y, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$

Рассмотрим функцию $f(t) = 2t^2 + \cos 2t$. Тогда первое уравнение полученной системы можно представить в виде $f(x) = f(y)$.

Из второго уравнения системы следует, что $x > 0$ и $y > 0$. Поэтому будем рассматривать функцию f на множестве $(0; +\infty)$.

Имеем: $f'(t) = 4t - 2\sin 2t = 2(2t - \sin 2t)$.

Из утверждения, доказанного в примере 3, следует, что $2t > \sin 2t$ при $t > 0$. Тогда $f'(t) > 0$ при всех $t \in (0; +\infty)$. Следовательно, функция f возрастает на $(0; +\infty)$. Поэтому из равенства $f(x) = f(y)$ получаем, что $x = y$.

Имеем: $\begin{cases} x = y, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x = \dfrac{1}{9}, \\ y = \dfrac{1}{9}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{9}\right)$. ◄

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}$, $D(f) = [2; 4]$.

Для всех $x \in (2; 4)$ имеем: $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}}$.

Решим уравнение $f'(x) = 0$. Запишем: $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}} = 0$. Легко установить, что это уравнение имеет единственный корень $x = 3$. Получили, что функция f на промежутке $[2; 4]$ имеет единственную критическую точку $x = 3$.

Поскольку функция f непрерывна на промежутке $[2; 4]$, то её наибольшее и наименьшее значения находятся среди чисел $f(3)$, $f(2)$, $f(4)$.

Имеем: $f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = \sqrt[4]{2}$.

Следовательно, $\max\limits_{[2;4]} f(x) = f(3) = 2$, причём наибольшее значение функция f принимает только при $x = 3$.

Так как нам надо решить уравнение $f(x) = 2$, то получаем, что $x = 3$ является его единственным корнем.

Ответ: 3. ◄

Упражнения

1. Докажите неравенство $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

2. Докажите неравенство $x < \operatorname{tg} x$, где $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. Решите уравнение $3x^7 + x + 7 = \sqrt{1 - 8x}$.

4. Решите уравнение $x^5 + 4x + \cos x = 1$.

5. Решите уравнение $x^3 + 2x = \sin x$.

6. Решите неравенство $x^7 + 3x > 2x^4 + 2$.

7. Решите неравенство $x^5 + 4x < 2x^3 + 3$.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = \sin x - \sin y, \\ 3x + 4y = 7. \end{cases}$

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - 2y = \cos y - \cos x, \\ x + y = 8. \end{cases}$

10. Решите уравнение $\sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 3} = x^2 - 8x + 18$.

11. Решите уравнение $\sqrt{x + 7} + \sqrt{1 - x} = x^2 + 6x + 13$.

Когда сделаны уроки

«Алеф-17»

«Алеф-17». Читая такое название рассказа, в мыслях могут возникнуть образы из очередного блокбастера – космического корабля, мчащегося к неизвестной планете, или загадочного вируса, атакующего Землю. Однако вы вряд ли догадаетесь, что этот знак (см. рис.) связан с... московской математической школой Н.Н. Лузина – абсолютно уникальным явлением в истории науки.

Н.Н. Лузин

В начале XX века математическая жизнь в Московском университете была довольно размеренной и академичной. Заслуженный профессор МГУ В.М. Тихомиров отмечает, что в то время в университете работал всего один математический семинар, посвящённый главным образом научным интересам его руководителя Д.Ф. Егорова. И вдруг, буквально за несколько лет, молодой математик Н.Н. Лузин, ученик Д.Ф. Егорова, совершенно изменяет ритм университетской жизни. Количество математических семинаров начало быстро расти и со временем стало исчисляться десятками, а потом перевалило за сотню.

За короткий промежуток времени Н.Н. Лузин собрал вокруг себя невероятное количество молодых математиков, многие из которых стали учёными с мировым именем и создали собственные научные школы. Ни в одном другом научном центре мира того времени не было подобного соцветия выдающихся математиков! Когда в середине 30-х годов XX века одного известного американского учёного попросили назвать крупнейших молодых математиков современности, он назвал четырёх московских учёных: А.О. Гельфонда, А.Н. Колмогорова, Л.С. Понтрягина и Л.Г. Шнирельмана.

К 100-летнему юбилею со дня рождения Н.Н. Лузина на механико-математическом факультете было создано «генеалогическое» древо его учеников, ставших докторами наук (см. рис.). Во всемирной компьютерной базе данных «Математическая генеалогия» Н.Н. Лузин на сегодняшний день имеет около 5000 научных потомков!

Лузин решительно реформировал методы подготовки молодых математиков. Даже начинающим студентам предлагалось сразу браться за решение открытых математических проблем. Целью ставилось получение самостоятельных научных результатов, развитие способности видеть новые задачи, искать нестандартные пути их решения. Говорят, что существовало негласное правило: если у аспиранта, сдающего экзамен, уже был самостоятельный научный результат, то вопросы задавали только по этому результату. «Мы все стремились вместо изучения толстой монографии в 200–300 страниц придумать новую постановку задачи», – вспоминает академик М.А. Лаврентьев.

Атмосфере школы Лузина были присущи юмор, ирония и театральность. Например, Лузин мог закончить лекцию словами: «теперь перед нашим интеллектуальным взором открывается зрелище необычайной красоты». Среди членов школы была введена иерархия по их достижениям с помощью так называемых «алефов» – символов на основе первой буквы $\aleph$ некоторых алфавитов (еврейского, финикийского, арабского и др., читается «алеф»). Дело в том, что в математике символы $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... используют для классификации множеств по их мощности. Вступающий в ряды учеников Лузина получал звание $\aleph_0$ – «алеф-нуль». За каждое достижение к индексу добавлялась единица. Всемирно известные учёные П.С. Александров и П.С. Урысон получили высокие звания $\aleph_5$ – «алеф-5», а символ $\aleph_{17}$ – «алеф-17» стал гербом школы.

Математическая школа Лузина стала ещё одним ярким подтверждением глубоких математических традиций в России. Поэтому все, кто любит и увлекается этой наукой, могут смело выбирать замечательную профессию математика.

Итоги главы 5

Непрерывность функции

Функция является непрерывной в точке, если предел функции в этой точке равен значению функции в этой точке.

Если функция является непрерывной в каждой точке некоторого множества, то говорят, что она непрерывна на этом множестве.

Функцию, непрерывную на своей области определения, называют непрерывной.

Приращение аргумента x в точке x_0

$\Delta x = x - x_0$

Приращение функции f в точке x_0

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ или $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

Производная функции

Производной функции f в точке x_0 называют число, равное пределу отношения приращения функции f в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ или } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной

Угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0, равен значению производной функции f в точке x_0.

Механический смысл производной

Если $y = s(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, то её мгновенная скорость в момент времени t_0 равна значению производной функции $y = s(t)$ в точке t_0.

Дифференцируемость функции

Если функция имеет производную в некоторой точке, то её называют дифференцируемой в этой точке. Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого множества, то говорят, что она дифференцируема на этом множестве.

Уравнение касательной, проведённой к графику f в точке с абсциссой x_0

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Признак постоянства функции

Если для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция f является константой на этом промежутке.

Признак возрастания функции

Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на этом промежутке.

Признак убывания функции

Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция f убывает на этом промежутке.

Окрестность точки

Промежуток $(a; b)$, содержащий точку x_0, называют окрестностью точки x_0.

Точки экстремума функции

Точку x_0 называют точкой максимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Точку x_0 называют точкой минимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Точки максимума и минимума называют точками экстремума функции.

Необходимое условие существования экстремума

Если x_0 является точкой экстремума функции f, то либо $f'(x_0) = 0$, либо функция f не является дифференцируемой в точке x_0.

Критические точки функции

Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называют критическими точками функции.

Признаки точек максимума и минимума

Пусть функция f дифференцируема на промежутке $(a; b)$ и x_0 — некоторая точка этого промежутка. Если для всех

$x \in (a; x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, а для всех $x \in [x_0; b)$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.

Пусть функция f дифференцируема на промежутке $(a; b)$ и x_0 — некоторая точка этого промежутка. Если для всех $x \in (a; x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, а для всех $x \in [x_0; b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 является точкой минимума функции f.

План исследования свойств функции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на чётность.
3. Найти нули функции.
4. Найти промежутки знакопостоянства функции.
5. Найти промежутки возрастания и убывания функции.
6. Найти точки экстремума и значения функции в точках экстремума.
7. Выявить другие особенности функции (периодичность функции, поведение функции в окрестностях отдельных важных точек и т. п.).

§ 42. Упражнения для повторения курса алгебры и начал математического анализа 10 класса

1. Функции, уравнения, неравенства

42.1. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{x-5}$;
2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$;
3) $f(x) = \dfrac{9}{x^2-5}$;
4) $f(x) = \dfrac{14}{x^2+4}$;
5) $f(x) = \dfrac{7x+13}{x^2-7x}$;
6) $f(x) = \dfrac{x}{|x|-3}$;
7) $f(x) = \dfrac{9}{|x|+5}$;
8) $f(x) = \dfrac{13}{|x|+x^2}$;
9) $f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}$;
10) $f(x) = \sqrt{x-1} + \dfrac{x+3}{x-10}$;
11) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$;
12) $f(x) = \sqrt{x-9} + \dfrac{6}{\sqrt{8-x}}$;
13) $f(x) = \sqrt{x+2} + \dfrac{x-7}{x^2-4}$;
14) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+3}} + \dfrac{5x-4}{x^2-8x+7}$;
15) $f(x) = \sqrt{-x^2-8x+9}$;
16) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+6x-7}} + \dfrac{1}{x^2-2x}$;
17) $f(x) = \sqrt{x-6} + \dfrac{2}{\sqrt{x^2-4x-12}}$;
18) $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt{15x-3x^2}} + \dfrac{x-5}{x^2-9}$.

42.2. Найдите область значений функции:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 1$;
2) $f(x) = \sqrt{x} - 2$;
3) $g(x) = 3 - x^2$;
4) $f(x) = x^2 + 2$;
5) $\varphi(x) = 5 + |x|$;
6) $h(x) = \sqrt{x^2+4} - 5$;
7) $f(x) = \sqrt{-x^2}$;
8) $f(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{3-x}$;
9) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$;
10) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

42.3. Найдите область определения и постройте график функции:

1) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$;
2) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+9}{3-x}$;
3) $f(x) = \dfrac{4x-20}{x^2-5x}$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-1}$.

42.4. Найдите нули функции:

1) $f(x) = \sqrt{x+7}$;
2) $f(x) = \dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$;
3) $f(x) = \sqrt{x^2-6}$;
4) $f(x) = (x-3)\sqrt{x-4}$.

42.5. Постройте график и укажите промежутки возрастания, убывания функции:

1) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{8}{x}, \text{ если } x \leqslant -4, \\ -x-2, \text{ если } -4 < x < 2, \\ -\dfrac{8}{x}, \text{ если } x \geqslant 2; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 5, \text{ если } x \leqslant -2, \\ x^2-2x-3, \text{ если } -2 < x < 4, \\ 2x-3, \text{ если } x \geqslant 4. \end{cases}$

42.6. Задайте формулой какую-нибудь функцию, область определения которой:

1) состоит из одного числа;
2) состоит из двух чисел;
3) промежуток $[0; 1]$.

42.7. Задайте формулой какую-нибудь функцию, область значений которой:

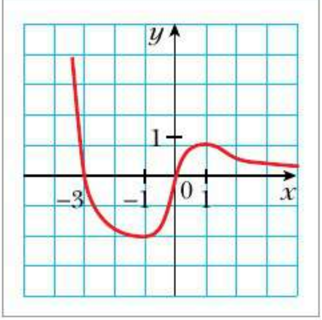
1) состоит из одного числа;
2) состоит из двух чисел;
3) промежуток $(1; 2)$.

42.8. Постройте график какой-нибудь функции, область определения которой — промежуток $[-2; 6]$, область значений — промежуток $[-1; 3]$ и которая убывает на промежутке $[-2; 1]$, возрастает на промежутке $[1; 6]$, принимает положительные значения на промежутке $[-2; 0)$ и отрицательные на промежутке $(0; 6]$.

42.9. На рисунке 42.1 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Пользуясь графиком, определите:

1) сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$;
2) при каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы один корень;
3) при каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два корня;
4) при каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно один корень.

Рис. 42.1



42.10. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = 7x^6$;
2) $f(x) = 3x^5 - 2x^7$;
3) $f(x) = \dfrac{x^2+6}{x^2-5}$;
4) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$;
5) $f(x) = x^2 - x + 1$;
6) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-x}$;
7) $f(x) = (x-2)^4 - (x+2)^4$;
8) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2x+6}$;
9) $f(x) = -x^3|x|$;
10) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^3-4x}$.

42.11. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = 3x + 9$;
2) $y = \dfrac{4}{x-6}$;
3) $y = \sqrt[5]{1-2x}$;
4) $y = 2 - \sqrt{x-4}$;
5) $y = x^2,\ \ x \in [1; +\infty)$;
6) $y = x^6,\ \ x \in (-\infty; -2]$.

42.12. Верно ли утверждение:

1) если каждая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает график функции не более чем в одной точке, то данная функция обратима;
2) если функция является нечётной, то она обратима;
3) если функция является чётной, то она обратима;
4) если обратимая функция является нечётной, то обратная к ней функция также нечётная;
5) функции $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$ взаимно обратные;
6) функции $y = x^4$ и $y = \sqrt[4]{x}$ взаимно обратные?

42.13. Решите неравенство:

1) $(2x-3)(3x+2)(x-9) \leqslant 0$;
2) $(6+x)(x+2)(4-x) > 0$;
3) $(x+4{,}8)(1-x)(5-x) \leqslant 0$;
4) $\dfrac{x-1{,}2}{x-8{,}4} \geqslant 0$;
5) $\dfrac{5-x}{x-2} \geqslant 0$;
6) $\dfrac{2x+1{,}6}{2-5x} \leqslant 0$;
7) $\dfrac{(x+11)(x+4)}{x-10} \geqslant 0$;
8) $\dfrac{x-2{,}5}{(x+6)(x-8)} \leqslant 0$.

42.14. Найдите множество решений неравенства:

1) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+6x+8} > 0$;
2) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-9} < 0$;
3) $x + \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{5}{2}$;
4) $\dfrac{3x+1}{x} \leqslant 1$;
5) $\dfrac{5x-1}{x} \geqslant 2$;
6) $\dfrac{x^3-8}{x^3-1} \leqslant \dfrac{x-2}{x-1}$;
7) $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x-2} < 4$;
8) $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x+2} \geqslant 2$.

42.15. Решите неравенство:

1) $\dfrac{(x+3)^2}{(x+2)(x-5)} < 0;$

2) $\dfrac{(x+3)^2}{(x+2)(x-5)} \leqslant 0;$

3) $\dfrac{(x+2)(x-5)}{(x-3)^2} \leqslant 0;$

4) $\dfrac{x-5}{(x+2)(x-3)^2} < 0;$

5) $\dfrac{(2x+1)^2(x-2)}{x^5(x+1)^4} \geqslant 0;$

6) $\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-5x+6} > 0.$

42.16. Найдите множество решений неравенства:

1) $\dfrac{(x^2-9)\sqrt{2-x}}{2x+3} \geqslant 0;$

2) $\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x+3}}{16-x^2} \leqslant 0.$

2. Степенная функция

42.17. Найдите значение выражения:

1) $4\left(-\sqrt[7]{5}\right)^7 - 0{,}6\sqrt[3]{1\,000} + \left(\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{640}\right)^4;$

2) $\sqrt[4]{5\dfrac{1}{16}} \cdot \sqrt[5]{-\dfrac{32}{243}} + \left(-3\sqrt[3]{6}\right)^3;$

3) $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{486}} + \sqrt[6]{3^4 \cdot 7} \cdot \sqrt[6]{3^2 \cdot 7^5};$

4) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10-\sqrt{73}};$

5) $\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}};$

6) $\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt[4]{12}} \cdot \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{12}+\sqrt{2}}.$

42.18. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt[4]{3x-5};$

2) $y = \sqrt[6]{-x};$

3) $y = \sqrt[5]{x-4};$

4) $y = \sqrt[8]{6x-x^2}.$

42.19. Упростите выражение:

1) $\sqrt[6]{a^6}$, если $a \geqslant 0;$

2) $\sqrt[4]{b^4}$, если $b \leqslant 0;$

3) $\sqrt[7]{c^7};$

4) $\sqrt[4]{81m^8n^{20}p^4}$, если $n \leqslant 0,\ p \geqslant 0;$

5) $1{,}4x\,\sqrt[8]{256x^{24}}$, если $x \leqslant 0;$

6) $\dfrac{\sqrt[12]{a^{12}b^{24}c^{36}}}{abc}$, если $a < 0,\ c < 0.$

42.20. Постройте график функции:

1) $y = \left(\sqrt[7]{x-2}\right)^7;$

2) $y = \sqrt[7]{(x-2)^7};$

3) $y = \left(\sqrt[8]{x-2}\right)^8;$

4) $y = \sqrt[8]{(x-2)^8}.$

42.21. Упростите выражение:

1) $\sqrt[4]{(2-\sqrt{7})^4}-\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[5]{(7-\sqrt{35})^5}-\sqrt[6]{(\sqrt{35}-6)^6}$.

42.22. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{a^{11}}$; 3) $\sqrt[4]{162m^{10}n^7}$; 5) $\sqrt[4]{-243y^5}$;

2) $\sqrt[3]{-b^{16}}$; 4) $\sqrt[5]{96x^{12}y^{16}}$; 6) $\sqrt[6]{a^{14}b^9}$.

42.23. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}}$; 3) $\dfrac{6}{\sqrt[5]{8}}$; 5) $\dfrac{9}{4-\sqrt{7}}$; 7) $\dfrac{6}{2-\sqrt[3]{5}}$;

2) $\dfrac{12}{\sqrt[4]{27}}$; 4) $\dfrac{14}{\sqrt[3]{-49}}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$; 8) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}$.

42.24. Упростите выражение:

1) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; 3) $\sqrt[5]{c\sqrt[3]{c}}$; 5) $\sqrt[4]{9\sqrt[3]{9}}$;

2) $\sqrt[3]{b\sqrt[3]{b^2}}$; 4) $\sqrt[12]{8}$; 6) $\sqrt[6]{2\sqrt[5]{2}}$.

42.25. Сравните числа:

1) $\sqrt[6]{80}$ и $\sqrt[3]{9}$; 3) $\sqrt[4]{15}$ и $\sqrt{3}$;

2) $\sqrt[3]{6}$ и $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[4]{27}$ и $\sqrt[3]{9}$.

42.26. Сократите дробь:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[6]{a}-2}{\sqrt[3]{a}-4}$; 3) $\dfrac{m-\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{m}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9}{x-27}$.

42.27. Найдите область определения функции:

1) $y=x^{\frac{5}{6}}$; 3) $y=(x+6)^{2,6}$;

2) $y=x^{-0,3}$; 4) $y=(x^2-6x-7)^{-\frac{1}{8}}$.

42.28. Вычислите значение выражения:

1) $3^{1,2}\cdot3^{-0,7}\cdot3^{1,5}$;

2) $11^{-\frac{4}{3}}\cdot11^{-\frac{3}{4}}\cdot11^{\frac{1}{12}}$;

3) $36^{0,7}\cdot6^{-0,4}$;

4) $\dfrac{27^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$;

5) $0,125^{-\frac{1}{3}}+0,81^{-\frac{1}{2}}-0,216^{-\frac{2}{3}}$;

6) $\left(0,027^{\frac{4}{3}}\right)^{-0,25}+256^{0,75}-\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{3}\right)^{-1}$;

7) $625^{0,25}-\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{4}\right)^{-\frac{3}{7}}+(\sqrt[7]{100})^{3,5}$;

8) $\left(\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}+9^{-\frac{1}{4}}\right)\left((\sqrt{32})^{-\frac{2}{5}}-\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)$;

9) $\left(9^{\frac{1}{4}}-(0,5\sqrt[3]{0,5})^{-0,75}\right)\left(81^{0,125}+\left(\cos^2\frac{\pi}{4}\right)^{-1}\right)$;

10) $\left(4^{0,25}+\left(\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-1,5}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\left(4^{\frac{1}{4}}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$.

42.29. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{81a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{16c^{-\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{3}{4}}$;

2) $\left(\dfrac{125a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}}{64c^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$;

3) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}\right)^{-6}$;

4) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}$.

42.30. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{m-n}{m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}\right)\left(\dfrac{n}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}=m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}}$;

2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}$;

3) $\left(\dfrac{9}{a+8}-\dfrac{a^{\frac{1}{3}}+2}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{1}{3}}+4}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{4}{3}}+8a^{\frac{1}{3}}}{1-a^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{5-a^{\frac{2}{3}}}{1+a^{\frac{1}{3}}}=5$;

4) $\left(\dfrac{m^{\frac{3}{4}}-n}{m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{3}}}-3\sqrt[12]{m^3n^4}\right):\left(\dfrac{m^{\frac{3}{4}}+n}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{3}}}-n^{\frac{2}{3}}\right)^2=\dfrac{1}{m^{\frac{1}{2}}}$.

42.31. Решите уравнение:

1) $\sqrt{4x+20}=x+2$;

2) $\sqrt{6-x}=3x-4$;

3) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$;

4) $\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x$;

5) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$;

6) $\sqrt{x+11}-\sqrt{3x+7}=2$;

7) $\sqrt{1-2x}-3=\sqrt{16+x}$;

8) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}=1$;

9) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{3-x}=4$.

42.32. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}-5=0$;

2) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=18$;

3) $\sqrt[3]{x^2-4x+4}+2\sqrt[3]{x-2}-3=0$;

4) $\dfrac{4-x}{2+\sqrt{x}}=8-x$;

5) $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}-6\sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}+1=0$;

6) $\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=\dfrac{5}{2}$;

7) $x^2-4x-\sqrt{x^2-4x-1}=3$;

8) $5\sqrt{x^2+3x-1}=2x^2+6x+1$.

3. Тригонометрические функции

42.33. При каких значениях a возможно равенство:

1) $\cos x=a+4$; 2) $\sin x=6a-a^2-10$?

42.34. Сравните с нулём значение выражения:

1) $\sin 168^\circ \cos 126^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 206^\circ \cos(-223^\circ)$; 3) $\cos 4 \operatorname{tg} 3$.

42.35. Найдите значение выражения:

1) $\sin 780^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 900^\circ$;

3) $\cos 1200^\circ$;

4) $\operatorname{ctg}(-585^\circ)$;

5) $\cos\dfrac{11\pi}{6}$;

6) $\sin\left(-\dfrac{17\pi}{3}\right)$.

42.36. Покажите, что число $T=-\dfrac{\pi}{2}$ не является периодом функции $f(x)=\operatorname{tg} x$.

42.37. Постройте график функции:

1) $y=\sin x+2$;

2) $y=\cos x-1$;

3) $y=\sin 3x$;

4) $y=\cos\dfrac{x}{2}$;

5) $y=-\dfrac{1}{2}\sin x$;

6) $y=1{,}5\cos x$.

42.38. Вычислите:

1) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{5}{\sqrt{34}}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

2) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

42.39. Упростите выражение:

1) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

2) $\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^4\alpha$;

3) $(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$;

4) $\dfrac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}$.

42.40. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $2\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha$;

2) $4\cos^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

42.41. Упростите выражение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)$;

2) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos(2\pi-\alpha)$;

3) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}$;

4) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-3\pi)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(5\pi-\alpha)-1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

42.42. Дано: $\sin\alpha=-0{,}8$, $\cos\beta=0{,}6$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$. Найдите $\cos(\alpha+\beta)$.

42.43. Докажите тождество:

1) $\sin\alpha\sin\beta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)=\sin(\alpha+\beta)$;

2) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$;

3) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\sin\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

42.44. Найдите наибольшее значение выражения $\cos\alpha+\sin\alpha$.

42.45. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$;

2) $\dfrac{1-\cos 6\alpha-\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{2\sin\alpha\cos 2\alpha}$;

3) $\sin 6\alpha\operatorname{tg}3\alpha+2\cos^2 3\alpha$;

4) $\cos^4\alpha-\sin^2\alpha-\cos 2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

5) $\dfrac{2\cos^2 2\alpha+\sin 2\alpha-1}{\sin 2\alpha-\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}$;

6) $\dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-1}{2\cos 3\alpha}$;

7) $\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\cdot\dfrac{\cos 2\alpha-\cos 6\alpha}{\sin 5\alpha-\sin\alpha}$;

8) $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}$.

4. Тригонометрические уравнения и неравенства

42.46. Решите уравнение:

1) $2\sin\left(\dfrac{x}{6}+\dfrac{\pi}{12}\right)+2=0$;

2) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{x}{2}\right)+\sqrt{3}=0$;

3) $3+\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$;

4) $4\operatorname{ctg}(3x-9)-8=0$.

42.47. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

42.48. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

42.49. Сколько корней уравнения $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=-1$ принадлежат промежутку $\left[0;\ \dfrac{9\pi}{2}\right]$?

42.50. Вычислите значение выражения:

1) $\cos\left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{2}+\arccos\dfrac{1}{2}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(3\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

42.51. Найдите область определения функции:

1) $y=\arcsin(x-5)$;

2) $y=\arccos(x^2-15)$;

3) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x+2}$.

42.52. Найдите область значений функции:

1) $y=2\arcsin x-\dfrac{\pi}{4}$;

2) $y=5-3\operatorname{arcctg}2x$.

42.53. Решите уравнение:

1) $\arcsin x=-\dfrac{\pi}{4}$;

2) $\arcsin x=\dfrac{5\pi}{6}$;

3) $\arccos(x-1)=\dfrac{2\pi}{3}$;

4) $\operatorname{arctg}\left(3x+\sqrt{3}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

42.54. Решите уравнение:

1) $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$;

2) $\cos 2x + \sin x = 0$;

3) $2\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$;

4) $2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

5) $3\operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$;

6) $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 5$;

7) $\sin x + 2\cos x = 0$;

8) $3\sin^2 x + \sin x \cos x = 2\cos^2 x$;

9) $2{,}5\sin 2x - \sin^2 x = 2$;

10) $\cos^2 \dfrac{x}{2} - 1{,}5\sin x = 1$;

11) $5\sin 2x - 2\sin x = 0$;

12) $\sin 2x = \cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2}$;

13) $\sin x + \sin 5x = 0$;

14) $2\sin^2 x + \sin 3x - \sin x = 1$;

15) $\cos 2x + \cos 6x = 3\cos 4x$;

16) $\cos x - \cos 3x = \sqrt{2}\sin 2x$.

42.55. Найдите корни уравнения $|\sin x| = 2\sin x + \cos x$, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.

42.56. Решите неравенство:

1) $\sin 3x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos\dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$;

3) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant -\dfrac{1}{2}$;

5) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

6) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{2x}{5} - \dfrac{\pi}{5}\right) \geqslant -1$.

Сведения из курса алгебры 7–9 классов

Выражения и их преобразования

1. Степень с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n, бóльшим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a. При этом каждый из множителей называют основанием степени, количество множителей — показателем степени.

Степень с основанием a и показателем n обозначают a^n и читают: «a в n-й степени».

Степенью числа a с показателем 1 называют само это число. Это позволяет любое число считать степенью с показателем 1.

2. Степень с целым отрицательным показателем

Для любого числа a, не равного нулю, и натурального числа n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Для любого числа a, не равного нулю, $a^0 = 1$.

Выражение 0^n при целых n, меньших или равных нулю, не имеет смысла.

3. Свойства степени с целым показателем

Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}.$$

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняются равенства:

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Квадратные корни

4. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$. Знак «$\sqrt{\ }$» называют знаком квадратного корня или радикалом.

Запись $\sqrt{a}$ читают «квадратный корень из a», опуская при чтении слово «арифметический».

Выражение, стоящее под знаком радикала, называют подкоренным выражением.

Если $\sqrt{a} = b$, то $b \geqslant 0$ и $b^2 = a$.

Для любого неотрицательного числа a справедливо, что $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

5. Свойства арифметического квадратного корня

Для любого действительного числа a выполняется равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Для любых действительного числа a и натурального числа n выполняется равенство

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b > 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Для любых неотрицательных чисел a_1 и a_2 таких, что $a_1 > a_2$, выполняется неравенство

$$\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}.$$

Элементы теории множеств

6. Множество. Операции над множествами

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут: $a \in A$ (читают: «a принадлежит множеству A»). Если элемент b не принадлежит множеству A, то пишут: $b \notin A$ (читают: «b не принадлежит множеству A»).

Множества A и B называют равными, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть каждый элемент множества A принадлежит множеству B и, наоборот, каждый элемент множества B принадлежит множеству A.

Если множества A и B равны, то пишут: $A = B$.

Множество B называют подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A. Это записывают так: $B \subset A$ или $A \supset B$ (читают: «множество B – подмножество множества A» или «множество A содержит множество B»).

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B.

Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$.

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B.

Объединение множеств A и B обозначают так: $A \cup B$.

7. Корень уравнения

Корнем уравнения называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение означает найти множество его корней.

8. Линейное уравнение с одной переменной

Уравнение вида $ax = b$, где x – переменная, a и b – некоторые числа, называют линейным уравнением с одной переменной.

Значения a и b	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
Корни уравнения $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — любое число	Нет корней

9. Квадратные уравнения

Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a, b, c – некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Числа a, b и c называют коэффициентами квадратного уравнения. Число a называют первым или старшим коэффициентом, число b – вторым коэффициентом, число c – свободным членом.

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют приведённым.

Существование корней квадратного уравнения и их количество зависят от знака значения выражения $b^2 - 4ac$. Это выражение называют дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и обозначают буквой D, то есть $D = b^2 - 4ac$.

Если $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

10. Теорема Виета

Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Если x_1 и x_2 – корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -b,\ x_1 x_2 = c.$$

11. Теорема, обратная теореме Виета

Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ и $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если числа α и β таковы, что $\alpha + \beta = -b$ и $\alpha\beta = c$, то эти числа являются корнями приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$.

12. Квадратный трёхчлен

Квадратным трёхчленом называют многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Корнем квадратного трёхчлена называют значение переменной, при котором значение квадратного трёхчлена равно нулю.

Дискриминантом квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ называют число $D = b^2 - 4ac$.

Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положительный, то данный трёхчлен можно разложить на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена.

Если дискриминант квадратного трёхчлена равен нулю, то разложение квадратного трёхчлена на множители имеет такой вид:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2,$$

где x_1 – корень квадратного трёхчлена.

13. Биквадратные уравнения

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют биквадратным уравнением.

Заменой $x^2 = t$ биквадратное уравнение сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$. Такой способ решения уравнений называют методом замены переменной.

Неравенства

14. Свойства числовых неравенств

Если к обеим частям верного неравенства прибавить или из обеих частей верного неравенства вычесть одно и то же число, то получим верное неравенство.

Если любое слагаемое перенести из одной части верного неравенства в другую, изменив знак слагаемого на противоположный, то получим верное неравенство.

Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство.

Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство.

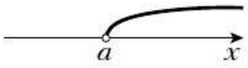
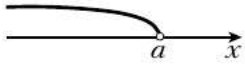
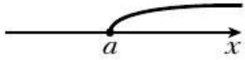
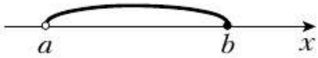
Если $ab > 0$ и $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

При почленном сложении верных неравенств одинакового знака результатом является верное неравенство того же знака.

При почленном умножении верных неравенств одинакового знака, у которых левые и правые части – положительные числа, результатом является верное неравенство того же знака.

Если $a > b$ и a, b – положительные числа, то $a^n > b^n$, где n – натуральное число.

15. Числовые промежутки

Неравенство	Промежуток	Изображение
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	

16. Неравенства с одной переменной и их системы

Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, при котором неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство означает найти множество его решений.

Если требуется найти все общие решения нескольких неравенств, то говорят, что надо решить систему неравенств.

Решением системы неравенств с одной переменной называют значение переменной, обращающее каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.

Решить систему неравенств означает найти множество её решений.

Все решения системы неравенств образуют множество решений системы неравенств. Если система решений не имеет, то говорят, что множеством её решений является пустое множество.

Чтобы решить систему неравенств, надо найти пересечение множеств решений неравенств, составляющих систему.

Функции

17. Функция. Область определения и область значений функции

Функция – это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества X можно найти единственное значение зависимой переменной из множества Y.

Если рассматривают функцию f с независимой переменной x и зависимой переменной y, то говорят, что переменная y функционально зависит от переменной x. Этот факт обозначают так: $y = f(x)$.

Независимую переменную ещё называют аргументом функции.

Множество всех значений, которые принимает аргумент, называют областью определения функции и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

Значение зависимой переменной функции $y = f(x)$, соответствующее значению x_0 аргумента x, называют значением функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f(x_0)$. Множество всех значений функции $y = f(x)$ в точках, принадлежащих множеству $D(f)$, называют областью значений функции и обозначают $E(f)$ или $E(y)$.

18. Способы задания функции

Функция считается заданной, если указаны её область определения и правило, с помощью которого можно по каждому значению независимой переменной найти значение зависимой переменной.

Функцию можно задать одним из следующих способов:

- описательно;
- с помощью формулы;
- с помощью таблицы;
- графически.

19. График функции

Графиком функции f называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции f.

Фигура является графиком функции f тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

1) если x_0 – некоторое значение аргумента, а $f(x_0)$ – соответствующее значение функции, то точка с координатами $(x_0; f(x_0))$ обязательно принадлежит графику;

2) если $(x_0; y_0)$ – координаты произвольной точки графика, то (x_0) и (y_0) – соответствующие значения независимой и зависимой переменных функции f, то есть $y_0 = f(x_0)$.

20. Свойства функции

Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют нулём функции.

Каждый из промежутков, на котором функция принимает значения одинакового знака, называют промежутком знакопостоянства функции.

Функцию f называют возрастающей на некотором множестве, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого множества таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функцию f называют убывающей на некотором множестве, если для любых двух значений аргумента x_1 и x_2 из этого множества таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Если функция возрастает на области определения, то её называют возрастающей. Если функция убывает на области определения, то её называют убывающей.

21. Линейная функция, её график и свойства

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где k и b – некоторые числа, x – независимая переменная, называют линейной.

Графиком линейной функции является прямая.

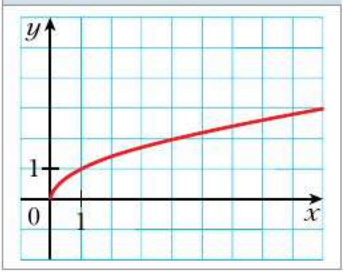
Линейную функцию, заданную формулой $y = kx$, где $k \neq 0$, называют прямой пропорциональностью.

22. Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

Областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является множество $[0; +\infty)$. Областью значений функции $y = \sqrt{x}$ является множество $[0; +\infty)$.

Графиком функции $y = \sqrt{x}$ является фигура, изображённая на рисунке 1. Она равна ветви параболы $y = x^2$.

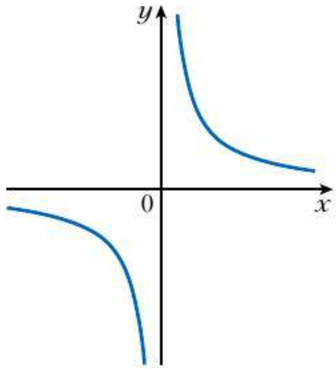
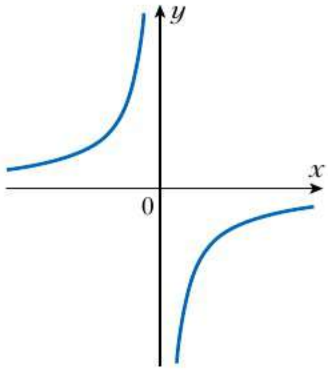
Рис. 1



23. Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график

Областью определения функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; областью значений этой функции является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, а графиком является фигура, которую называют гиперболой.

Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III четвертях (рис. 2), а если $k < 0$, то во II и IV четвертях (рис. 3).

Рис. 2	Рис. 3
	

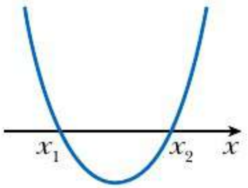
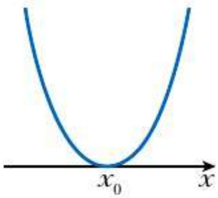
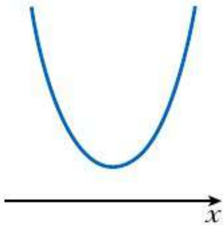
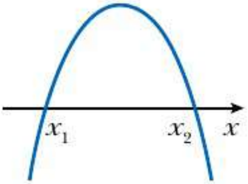
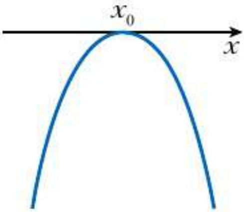
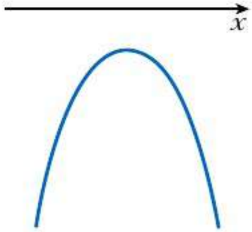
24. Квадратичная функция

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют квадратичной.

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$, равная параболе $y = ax^2$.

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх; если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Схематическое расположение параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знаков чисел a и D отображено в таблице (x_1 и x_2 — нули функции, x_0 — абсцисса вершины параболы).

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

25. Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований

График функции $y = f(x) + b$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на b единиц вверх, если $b > 0$, и на $-b$ единиц вниз, если $b < 0$.

График функции $y = f(x + a)$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ на a единиц влево, если $a > 0$, и на $-a$ единиц вправо, если $a < 0$.

График функции $y = kf(x)$ можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на k.

Системы уравнений с двумя переменными

26. Уравнение с двумя переменными

Пару значений переменных, обращающую уравнение с двумя переменными в правильное равенство, называют решением уравнения с двумя переменными.

Решить уравнение с двумя переменными означает найти множество его решений.

Фигура является графиком уравнения с двумя переменными тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

1) все решения уравнения являются координатами точек, принадлежащих графику;
2) координаты любой точки, принадлежащей графику, – это пара чисел, являющаяся решением данного уравнения.

27. Системы уравнений с двумя переменными

Если надо найти все общие решения нескольких уравнений, то говорят, что надо решить систему уравнений.
Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающих каждое уравнение в правильное равенство.
Решить систему уравнений значит найти множество её решений.

Модуль числа

28. Модуль числа

Модулем числа a называют расстояние от начала отсчёта до точки, изображающей это число на координатной прямой.
Модуль числа a обозначают так: $|a|$ (читают: «модуль a»).

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Модуль числа принимает только неотрицательные значения.
Модули противоположных чисел равны: $|a| = |-a|$.

Элементы комбинаторики

29. Комбинаторные правила суммы и произведения

Правило суммы. Если множество A состоит из m элементов, а множество B – из k элементов, причём эти множества не имеют общих элементов, то выбор «a или b», где $a \in A$, $b \in B$, можно осуществить $m + k$ способами.
Правило произведения. Если элемент a можно выбрать m способами и после каждого такого выбора элемент b можно выбрать k способами, то выбор «a и b» в указанном порядке можно осуществить mk способами.

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект – это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации: необходимой литературы и интернет-ресурсов. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.

2. Работа начинается с составления предварительного плана, в котором отражается замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками и литературой при помощи руководителя проекта составляется окончательный план.

3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записанными в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.

4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.

5. Примерный объём работы – 10–15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.

6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Периодические функции

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Дорофеев Г.В., Розов Н.Х. Функции периодические и непериодические // Квант. – 1987. – № 9.

Земляков А., Ивлев Б. Периодические функции // Квант. – 1976. – № 12.

Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Тригонометрия. – Киев: Генеза, 2008.

Рывкин А.А. Периодические функции // Квант. – 1973. – № 5.

Фалин Г.И., Фалин А.И. Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ. – М.: БИНОМ, 2007.

2. Определение элементарных функций с помощью функциональных уравнений Коши

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Андреев А.А., Кузьмин Ю.Н., Савин А.Н. Функциональные уравнения. – Самара : Пифагор, 1997.

Бродский Я.С., Слипенко А.К. Функциональные уравнения. – Киев: Вища шк., 1983.

Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. – М.: Физматлит, 2001.

3. Парадоксы теории множеств

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. – М.: Наука, 1965.

Ященко И.В. Парадоксы теории множеств. – М.: МЦМНО, 2002.

4. Математическая логика — язык математики

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Бизам Д., Герцег Я. Игра и логика. – М.: Мир, 1975.

Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. – М.: Наука, 1974.

Гжегорчик А. Популярная логика. – М.: Наука, 1979.

Мадер В.В. Школьнику об алгебре логики. – М.: Просвещение, 1993.

Никольская И.Л. Математическая логика. – М.: Высшая школа, 1981.

Эдельман С.Л. Математическая логика. – М.: Высшая школа, 1975.

5. Тригонометрическая подстановка

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Алексеев Р., Курляндчик Л. Тригонометрические подстановки // Квант. – 1995. – № 2.

Горнштейн П.И. Тригонометрия помогает алгебре // Бюро Квантум, приложение к журналу «Квант». – № 3/95.

Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. – М.: Изд-во МГУ, 1991.

Смоляков А.Н. Тригонометрические подстановки в уравнения и неравенства // Математика в школе. – 1996. – № 1.

Фалин Г.И., Фалин А.И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ. – М.: БИНОМ, 2006.

Рекомендуемые литература и интернет-ресурсы

Бурман Ю., Спивак А. Автостоянки, перестановки и деревья // Квант. – 2004. – № 4.

Гарднер М. Числа Каталана // Квант. – 1978. – № 7.

Спивак А. Числа Каталана // Квант. – 2004. – № 3.

Шень А. Программирование: теоремы и задачи. – М.: МЦНМО, 2004.

Дружим с компьютером

В предыдущих классах вы приобрели умения и навыки работы с компьютером и можете с его помощью выполнять техническую (вычислительную) работу при решении математических задач, проводить статистическую обработку информации, умеете представлять информацию таблично и графически, искать информацию в глобальной сети Интернет.

В дальнейшем вы будете совершенствовать эти умения и самостоятельно определять, какие из них следует применять при изучении математики. Однако больше внимания вы теперь будете уделять построению математических моделей и алгоритмов для решения задач. Для изучаемых в данном курсе математики объектов и процессов вы будете строить математические модели, проводить их анализ, выбирать способ представления и хранения нужной информации, составлять алгоритмы выполнения заданий и реализовывать их с помощью компьютера. Уровень реализации этих моделей может зависеть от того, в каком объёме вы изучаете информатику и насколько близко планируете связать свою будущую профессию с этим видом деятельности.

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем либо при их повторении.

* Задания, содержащие элементы программирования, отмечены звёздочкой (*). В зависимости от уровня изучения информатики их можно выполнять, записывая алгоритм словами или в виде блок-схемы, либо же реализовывать эти алгоритмы в виде программ на изучаемом языке программирования.

! Наиболее сложные задания отмечены восклицательным знаком.

К главе 1 «Повторение и расширение сведений о функции»

1.1. Повторите, какими способами задания функции вы пользовались в предыдущих классах для того, чтобы представить эту функцию с помощью компьютера.

1.2. Каким образом характеристики функции помогают построить её график на экране компьютера?

1.3.!* Функция задана таблично. Запишите алгоритм для определения того, является ли эта функция возрастающей либо убывающей. Какую структуру данных изучаемого языка программирования вы используете для табличного представления функции?

К § 1 «Наибольшее и наименьшее значения функции. Чётные и нечётные функции»

1.4. Каким образом следует учитывать наибольшее и наименьшее значения функции при построении графика функции на экране компьютера?

1.5. Задайте в табличном редакторе некоторую функцию для положительных значений аргумента. Дополните таблицу так, чтобы получилась: 1) чётная функция; 2) нечётная функция. Как сделать это автоматически? Постройте график этой функции.

1.6. На основании теорем 1.1 и 1.2 сделайте вывод о том, какие инструменты графического редактора полезны для построения графика чётной функции, нечётной функции.

1.7.* Функция задана таблично. Запишите алгоритм для поиска наибольшего и наименьшего значений функции. Какую структуру данных изучаемого языка программирования вы используете для табличного представления функции?

К § 2 «Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований»

2.1. Придумайте и выполните задания, иллюстрирующие построение графика $y = f(kx)$ с помощью табличного редактора и с помощью графического редактора. Какие отдельные случаи надо рассмотреть?

К § 3 «Обратная функция»

3.1. Задайте таблично некоторую функцию с помощью табличного редактора. С помощью средств табличного редактора задайте обратную к ней функцию.

3.2.!* Запишите алгоритм, который для функции, заданной таблично, определяет, является ли она обратимой.

3.3. Нарисуйте в графическом редакторе график некоторой функции. Какие инструменты графического редактора надо использовать, чтобы получить из этого графика график обратной к ней функции?

3.4.!* Запишите алгоритм, который для двух функций, заданных таблично, определяет, являются ли они взаимно обратными.

К § 4 «Равносильные уравнения и неравенства»

4.1. Приведите примеры того, как при составлении алгоритмов следует учитывать область определения используемых выражений. Какой может быть реакция компьютера, если этого не сделать? Приведите примеры возможных ошибок.

К § 5 «Метод интервалов»

5.1.* Предположим, что у вас есть подпрограмма, позволяющая вычислить значение некоторой непрерывной функции в любой точке, и известны все нули этой функции.

1) Запишите алгоритм, который выдаёт все промежутки знакопостоянства этой функции.

2) Запишите алгоритм построения графического изображения нулей и промежутков знакопостоянства этой функции (см. рисунки к § 5).

5.2.!* Предположим, что у вас есть подпрограмма, позволяющая вычислить значение некоторой функции в любой точке. Можно ли с помощью этой подпрограммы найти все нули этой функции? Сделайте вывод об особенностях решения уравнений с помощью компьютера. Найдите в Интернете информацию о численных методах решения уравнений.

5.3.!* Известно, что $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены. Предположим, что у вас есть подпрограммы, позволяющие вычислить значения функций $f(x)$ и $g(x)$ в любой точке. Запишите алгоритм, который выдаёт промежутки знакопостоянства функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Договоримся: 1) считать нулём функции точку, в которой значение функции меньше 0,001; 2) соседние нули функции расположены на расстоянии не менее 0,1 друг от друга. Зачем нужны эти договорённости?

К § 6 «Степенная функция с натуральным показателем»

6.1. С помощью табличного редактора составьте таблицу значений нескольких степенных функций для разных значений степени n. Постройте их графики. Исследуйте их взаимное расположение.

К § 7 «Степенная функция с целым показателем»

7.1. С помощью табличного редактора составьте таблицу значений нескольких степенных функций для разных значений степени n. Постройте их графики. Исследуйте их взаимное расположение. Какое ограничение следует наложить на аргументы функции по сравнению с заданием 6.1?

К § 8 «Определение корня n-й степени»

8.1.!* Предположим, что в языке программирования нет операции извлечения корня n-й степени. Пользуясь определением корня n-й степени, запишите алгоритм для нахождения корня n-й степени из данного числа (считайте, что искомый корень найден, если n-я степень найденного корня отличается от данного числа менее чем на 0,01).

К § 10 «Определение и свойства степени с рациональным показателем»

10.1.!* Пользуясь результатами задачи 8.1, запишите алгоритм, который по входным данным значениям a, m, n выдаёт значение $a^{\frac{m}{n}}$. Какие проверки входных данных надо сделать и какие частные случаи рассмотреть?

К § 13 «Иррациональные неравенства»

13.1.!* Имеется несколько неравенств и для каждого из них записаны их решения в виде объединения некоторого количества промежутков. Придумайте способ представления этих промежутков в виде, удобном для компьютерной обработки. Запишите алгоритм, который решает систему этих неравенств и выдаёт результат также в виде объединения некоторого количества промежутков.

К § 14 «Радианная мера угла»

14.1. Запишите алгоритм для перевода градусной меры угла в радианную и наоборот.

К § 15 «Тригонометрические функции числового аргумента»

15.1. Научитесь вычислять тригонометрические функции числового аргумента с помощью микрокалькулятора; программы «Калькулятор» из набора стандартных программ на компьютере. В каких единицах может измеряться исходный угол?

15.2. Найдите в изучаемом языке программирования стандартные функции для вычисления тригонометрических функций числового аргумента.

К § 17 «Периодические функции»

17.1. Какие инструменты графического редактора следует применять для построения графика периодической функции?

17.2. Задайте в табличном редакторе значения некоторой функции на отрезке длиной в период этой функции. Какие инструменты табличного редактора следует применить, чтобы автоматически задать функцию на отрезке длиной в несколько периодов и построить график этой функции на этом отрезке?

К § 18 «Свойства и графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$»

18.1. Составьте в табличном редакторе таблицу значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ и постройте их графики.

18.2.! С помощью табличного редактора проиллюстрируйте преобразования графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$; придумайте для этого примеры, аналогичные примерам 4–6 § 18.

К § 19 «Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$»

19.1. Составьте в табличном редакторе таблицу значений функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ и постройте их графики.

К § 20 «Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента»

20.1. Для всех ли тригонометрических функций есть своя кнопка на микрокалькуляторе? А в интерфейсе программы «Калькулятор» из набора стандартных программ компьютера? Отдельная стандартная функция в изучаемом вами языке программирования? Реализуйте вычисление недостающих функций с помощью имеющихся.

К главе 4 «Тригонометрические уравнения и неравенства»

26.1.* Запишите общие алгоритмы для решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

26.2. Научитесь находить значения функций арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс с помощью микрокалькулятора, программы «Калькулятор» из набора стандартных программ на компьютере, стандартных функций изучаемого языка программирования.

К § 33 «Представление о пределе функции в точке и о непрерывности функции в точке»

33.1. Каким образом с помощью табличного редактора можно проиллюстрировать понятие предела функции в точке?

33.2.!* Предположим, что у вас есть таблица значений функции в некоторых точках. Составьте программу, которая выводит на экран график непрерывной функции, проходящий через данные точки. Составьте программу, которая выводит на экран график функции, не являющейся непрерывной, который проходит через данные точки.

К § 34 «Задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции»

34.1.!* Предположим, что закон движения точки по координатной прямой задан формулой. Напишите программу для приближённого вычисления: 1) средней скорости точки на некотором промежутке; 2) мгновенной скорости точки в некоторый момент времени.

К § 36 «Правила вычисления производных»

36.1. Найдите в Интернете информацию о численных методах дифференцирования.

К § 38 «Признаки возрастания и убывания функции»

38.1. Проиллюстрируйте изучаемый теоретический материал с помощью графического редактора.

К § 39 «Точки экстремума функции»

39.1.* Предположим, что у вас есть подпрограмма, позволяющая для дифференцируемой функции f вычислить значение $f'(x)$ в любой точке, и известны все критические точки функции f (критических точек конечное число).

1) Запишите алгоритм, который позволяет найти все промежутки возрастания и убывания этой функции.

2) Можно ли на основании приведённых исходных данных определить, являются ли критические точки точками максимума, минимума? Запишите соответствующий алгоритм.

К § 41 «Построение графиков функций»

41.1.* Функция задана формулой. Составьте программу, которая выводит на экран график этой функции. Какие причины могут привести к тому, что график будет неправильным?

Ответы и указания

1.5. Не обязательно. **1.22.** $c = -133$. **1.23.** $c = 15$. **1.24.** 1) 16; 2) 32. **1.25.** 2500 м^2. **1.26.** 0. **1.27.** 0. **1.33.** Убывающая. **1.34.** Возрастающая. **1.35.** 2; 5. **1.36.** –3; –1. **1.45.** $m = 3$. **1.46.** $b \leqslant 18$. **2.11.** На 20 %. **2.12.** 10 %. **3.13.** *Указание.* Пусть функция f нечётная, функция g обратная к ней. Имеем: $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = x_0$. Тогда $g(-y_0) = g(-f(x_0)) = g(f(-x_0)) = -x_0 = -g(y_0)$. **3.14.** 11 ч. **3.15.** 24 ч, 12 ч. **4.11.** 3) Может сузиться на число –1, то есть может быть утерян корень $x = -1$; 4) может расшириться на число –1. **5.1.** 5) $\left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$. **5.5.** 2) $(-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -3) \cup (-2; 2) \cup (3; +\infty)$; 5) $[0; 1) \cup [3; 7)$; 6) $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right] \cup (4; +\infty)$. **5.6.** 3) $(-6; -3] \cup [4; 6)$; 4) $(-\infty; -1] \cup \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$. **5.7.** 2) $\left(-\frac{5}{3}; 2\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$; 4) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (4; +\infty)$. **5.8.** 1) $\left(-\infty; \frac{5}{6}\right) \cup (2; +\infty)$; 2) $[-6; -5] \cup [-3; +\infty)$. **5.9.** 1) $(2; 4) \cup (4; 5)$; 2) $[2; 5]$; 3) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$; 4) $(-\infty; 2] \cup \{4\} \cup [5; +\infty)$; 5) $(-2; 1)$; 6) $[-2; 1] \cup \{3\}$; 7) $(-\infty; -2) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$; 8) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. **5.10.** 2) $(-\infty; -1) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4] \cup \{-3\} \cup [5; +\infty)$. **5.11.** 2) $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$. **5.12.** 1) $(-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$; 2) $(-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$; 3) $(-5; 3) \cup (3; 4)$; 4) $[-5; 3) \cup (3; 4]$; 5) $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$; 6) $(-\infty; -4) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$; 7) $(-4; 1) \cup (1; 2)$; 8) $(-4; 2)$. **5.13.** 5) $(0; 1)$; 6) $\left(-3; \frac{3}{4}\right) \cup [2; 6]$. **5.14.** 1) $(-\infty; -2) \cup [-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; 4) $(-3; 1) \cup [5; +\infty)$. **5.15.** 1) $(-\infty; -6) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; 2\right)$; 2) $(-\infty; -4) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right)$; 3) $(-\infty; -5] \cup \{1, 3\}$; 4) $(-\infty; -4) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; 3)$. **5.16.** 1) $(1; 2{,}5) \cup (3; +\infty)$; 2) $[1; 2] \cup \{-2\}$; 3) $(-\infty; -5] \cup [-4; 0] \cup \{2\}$. **5.17.** 1) $(-5; 0) \cup \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 8)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 2\right)$; 3) $(-\infty; -4) \cup (-4; -3] \cup \left[-\frac{2}{5}; 1\right) \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -3] \cup [0; 2)$; 5) $\left[-\frac{3}{4}; -2\right] \cup (3; +\infty)$; 6) $(-\infty; -6] \cup [-4; 6]$. **5.18.** 1) $[1; 3)$; 2) $(-\infty; -2] \cup \{1\} \cup (5; +\infty)$; 3) $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (4; +\infty)$; 4) $(0; 2] \cup \{3\}$. **5.19.** 1) $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup (-1; 0) \cup (1; \sqrt{3}]$; 2) $[-4; -3) \cup (-2; 2) \cup (3; 4]$. **5.20.** 1) $(-\infty; 0) \cup (1; 6)$; 2) $(-\infty; -4) \cup (-3; 3) \cup (6; +\infty)$. **5.21.** 2) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 3) $[-2; -1] \cup [1; 2]$; 4) $(-\infty; -2] \cup \{-1, 1\} \cup [2; +\infty)$; 5) $(1; 2)$; 6) $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$; 7) $[1; 2] \cup \{5\}$; 8) $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [5; +\infty)$. **5.22.** 1) $(3; 7)$; 2) $[3; 7] \cup \{-2\}$; 3) $(-2; 3)$; 4) $[-2; 3] \cup \{7\}$; 5) $(-4; 4)$; 6) $\varnothing$; 7) $[-4; 4]$; 8) $\{-4, 4\}$.

5.23. $(-3; 0] \cup (3; +\infty)$. **5.24.** $(-4; 1] \cup (4; +\infty)$. **5.25.** 1) Если $a = 3$, то решений нет; если $a < 3$, то $a < x < 3$; если $a > 3$, то $3 < x < a$; 2) если $a \leqslant 3$, то $x > 3$; если $a > 3$, то $3 < x < a$ или $x > a$; 3) если $a < 3$, то $x \geqslant 3$ или $x = a$; если $a \geqslant 3$, то $x \geqslant 3$; 4) если $a \leqslant -5$, то $x < a$; если $a > -5$, то $x < -5$ или $-5 < x < a$; 5) если $a < -5$, то $x \leqslant a$ или $x = -5$; если $a \geqslant -5$, то $x \leqslant a$; 6) если $a = 5$, то $x < 5$ или $x > 5$; если $a < 5$, то $x < a$ или $x \geqslant 5$; если $a > 5$, то $x \leqslant 5$ или $x > a$; 7) если $a = -1$, то $x > -1$; если $a < -1$, то $a \leqslant x < -1$ или $x > -1$; если $a > -1$, то $x \geqslant a$; 8) если $a = -1$, то $x < -1$; если $a < -1$, то $x < a$ или $a < x \leqslant -1$; если $a > -1$, то $x \leqslant -1$. **6.13.** 4) $\min\limits_{(-\infty; -2]} f(x) = 256$; наибольшего значения не существует. **6.19.** 1) Если $a = 6$, то один корень; если $a > 6$, то 2 корня; если $a < 6$, то корней нет; 2) если $a = 1$ или $a = -8$, то один корень; если $a < -8$ или $a > 1$, то 2 корня; если $-8 < a < 1$, то корней нет. **6.20.** Если $a = 0$, или $a = 3$, или $a = -3$, то один корень; если $a < -3$ или $0 < a < 3$, то 2 корня; если $-3 < a < 0$ или $a > 3$, то корней нет. **6.21.** 1) Чётным; 2) нечётным; 3) нечётным; 4) установить невозможно; 5) чётным; 6) установить невозможно. **7.7.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. **7.8.** 1) $(1; 1)$, $(-1; -1)$; 2) $\left(2; \frac{1}{4}\right)$. **7.9.** $\left(2; \frac{1}{16}\right)$. **7.14.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(x) = 64$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(x) = 1$; 2) $\max\limits_{\left[-1; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 64$, $\min\limits_{\left[-1; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 1$; 3) $\max\limits_{[1; +\infty)} f(x) = 1$, наименьшего значения не существует. **7.15.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{3}; 2\right]} f(x) = 27$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{3}; 2\right]} f(x) = \frac{1}{8}$; 2) $\max\limits_{[-2; -1]} f(x) = -\frac{1}{8}$, $\min\limits_{[-2; -1]} f(x) = -1$; 3) наибольшего значения не существует, $\min\limits_{(-\infty; -3]} f(x) = -\frac{1}{27}$. **7.16.** 1) 4 решения; 2) 2 решения. **7.17.** 1) 3 решения; 2) 2 решения. **7.18.** 1) Нечётным; 2) установить невозможно; 3) чётным; 4) установить невозможно. **7.21.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $\{0\}$; 4) $[8; +\infty)$; 7) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$; 8) $[0; 9) \cup (9; +\infty)$. **8.4.** 7) 3; 8) 2. **8.5.** 4) 7. **8.8.** 1) 29; 2) 56. **8.9.** 1) $-11{,}8$; 2) $58\frac{1}{3}$. **8.12.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. **8.13.** 1) $(-\infty; 2]$; 2) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. **8.14.** 1) $[1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2]$; 3) $\boldsymbol{R}$. **8.15.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[-4; +\infty)$; 3) $\boldsymbol{R}$. **8.27.** 1) -1; 2; 2) -1; 3. **8.28.** 1) -3; 2; 2) -3; 1. **8.31.** 1) $(65; +\infty)$; 2) $(-\infty; 21)$; 3) $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$. **8.32.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 10)$; 3) $\left[-\frac{1}{5}; 16\right]$. **8.37.** 1) $m^4\sqrt{-m}$; 2) $a^2b^6\sqrt{b}$; 3) $-2x^3\sqrt{y}$; 4) $-3xy^7\sqrt{5x}$. **8.38.** 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$. **9.15.** 1) 0; 2) $3\sqrt[3]{7m}$. **9.16.** 1) $27\sqrt[3]{2}$; 2) $29\sqrt[4]{a}$. **9.17.** 4) $\sqrt[30]{b^7}$; 5) $\sqrt[3]{x^2}$; 6) $\sqrt[12]{128}$. **9.18.** 5) $\sqrt[6]{x^5}$; 6) $\sqrt[3]{a}$. **9.23.** 1) $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$; 2) $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$; 3) a и b – произвольные числа; 4) a и b – произвольные числа. **9.24.** 2) $[3; 7]$; 3) $\boldsymbol{R}$. **9.25.** 2) $-n$; 4) c^4;

7) $-0{,}1a^3b^5$. **9.26.** 3) $10x$; 6) $-a^{13}b^{11}c^{11}$. **9.27.** 1) 3; 2) 14; 3) –1; 4) 1. **9.28.** 1) 7; 2) –1. **9.31.** 1) $[-4; +\infty)$; 2) $\boldsymbol{R}$; 3) $[-1; 3]$. **9.32.** 2) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. **9.36.** 1) Корней нет; 2) 3; 3) –1; 3. **9.37.** 1) –4; 2) 2. **9.38.** 1) $ab \geqslant 0$; 2) $b = 0$, a — любое число или $b > 0$, $a \geqslant 0$; 3) $b = 0$, a — любое число или $b > 0$, $a \leqslant 0$. **9.39.** 1) $m^2\sqrt[4]{-m}$; 2) $a^2b^3\sqrt[4]{b}$; 3) $|x| \cdot y \cdot \sqrt[6]{y}$; 4) $2m^4n^4\sqrt[4]{2m^2n}$; 5) $-3ab^2c^3\sqrt[4]{2}$; 6) $a^3b^3\sqrt[4]{a^3b^3}$; 7) $-a^3b^6\sqrt[8]{-ab^2}$. **9.40.** 1) $-2a\sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a\sqrt[4]{-a}$; 3) $ab\sqrt[6]{ab}$; 4) $a^3b^3\sqrt[6]{a^2b}$. **9.41.** 1) $\sqrt[4]{2a^4}$; 2) $-\sqrt[6]{6a^3b^4}$; 3) $\sqrt[4]{mn}$; 4) $\sqrt[6]{6b^6}$, если $b \geqslant 0$, $-\sqrt[6]{6b^6}$, если $b < 0$; 5) $-\sqrt[6]{-a^7}$; 6) $-\sqrt[4]{a^5b^6}$. **9.42.** 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{a^7}$; 3) $\sqrt[4]{6a^4b^4}$; 4) $-\sqrt[8]{3a^4b^3}$; 5) $-\sqrt[4]{-a^7}$. **9.43.** 1) 1; 2) 2. **9.44.** 1) 1; 2) $\sqrt{23}$. **9.45.** 1) $\frac{\sqrt[4]{a}-1}{a}$; 2) $\sqrt[6]{x}$; 3) $-\sqrt[4]{a}$; 4) $\sqrt[6]{a}$. **9.47.** $[3; 5]$. **9.49.** 1) *Указание*. Пусть $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = a$, $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = b$. Надо показать, что $x = a + b$ — число рациональное. Имеем: $a^3 + b^3 = 7 + 5\sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2} = 14$; $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 14$; $(a+b)((a+b)^2 - 3ab) = 14$; $x(x^2 + 3) = 14$; $x^3 + 3x - 14 = 0$. Полученное уравнение имеет единственный корень $x = 2$. **9.52.** 6) 16. **10.5.** 3) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{5}{3}$; 8) $\frac{1}{2}$. **10.6.** 4) 4. **10.7.** 2) $[3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$. **10.9.** 3) 125; 6) 10; 9) 4. **10.10.** 2) 49; 5) 32. **10.11.** 4) $(\sqrt[8]{a})^8$. **10.15.** 1) 6; 2) 100; 3) $12\frac{4}{9}$; 4) 2; 5) 10; 6) $\frac{2}{15}$; 7) 3; 8) $\frac{25}{21}$. **10.16.** 1) 7; 2) 10; 3) $122\frac{7}{9}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) 21; 6) $\frac{225}{256}$. **10.17.** 1) 125; 2) 6; 3) корней нет. **10.18.** 1) $\frac{1}{9}$; 3) 5. **10.23.** 2) $a^{0,5} - 2b^{0,5}$; 6) $a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$; 9) $3^{\frac{1}{5}}$. **10.24.** 3) $1 + \frac{b}{a^{0,5}}$; 6) $x^{2,5}y^{2,5} \cdot \frac{x^{0,5} - y^{0,5}}{x^{0,5} + y^{0,5}}$; 9) $2^{\frac{1}{2}}$. **10.25.** 1) $\frac{a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}$; 2) $\frac{2(a+b)}{a-b}$; 3) $\frac{\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{13}{12}}}$; 4) $a^2 + ab + b^2$. **10.26.** 1) $2m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$; 2) 3; 3) $-\frac{a}{b}$; 4) $m^{-\frac{1}{2}}$. **11.2.** 5) –1; 1; 6) 1; 7. **11.3.** 3) –1; 1. **11.4.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) корней нет; 4) 3. **11.5.** 2) Корней нет; 3) –5; 7; 4) 7. **11.6.** 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) 5; 5) 4; 6) 2; 7) 3; 8) –4. **11.7.** 1) –5; 2) 4; 3) 0; 4) –1; 5) 5. **11.8.** 1) 4; 2) 2; 3; 3) –7; 8; 4) –1; 1; 4. **11.9.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) 7; –4. **11.10.** 1) 1; $-\frac{27}{8}$; 2) 16; 3) 25; 4) 1; 5) 8; 6) 0; 1; 7) 1; 29; 8) 0; 16; 9) $\frac{9}{8}$; 10) 8. **11.11.** 1) 16; 2) 1; 512; 3) 4; 4) –4; 11; 5) –8; 1; 6) –61; 7) 0; 1; 8) 2,8; –1,1. **11.12.** 1) 0; 5; 2) 7. **11.13.** 1) 6; 2) 2; 3) –1; 3; 4) –2. **11.14.** 1) 2; 2) 8.

11.15. 1) 6; 9; 2) $\frac{137}{16}$; 3) корней нет; 4) 1; –3. **11.16.** 1) –5; 4; 2) –1. **11.17.** 1) 4; 2) 2; 3) корней нет. **11.18.** 1) –1; 2) 6. **11.19.** 1) 1; 4; 2) $-\sqrt{11}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$; 3) –1; 4; 4) –2; 5; 5) –4; 1; $\frac{-3+\sqrt{22}}{2}$; $\frac{-3-\sqrt{22}}{2}$; 6) 1024. **11.20.** 1) –1; 5; 2) 1; 2; 3) 1; 2; 4) –6; 4. **11.21.** 1) 27; 2) корней нет. **11.22.** 1) 10; 2) $x \geqslant -4$. **11.24.** $f(x) = -2x + 1$. **12.1.** 3) $\frac{-3+\sqrt{65}}{2}$; 4) 0; $\frac{1}{2}$; 5) 8; 6) 25; 7) –5; $6\frac{3}{7}$. **12.2.** 3) 5; 4) –1. **12.3.** 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 6) $\frac{6-\sqrt{6}}{3}$. **12.4.** 1) 2; 6; 2) –1; 3) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$. **12.5.** 3) $\frac{14+\sqrt{7}}{2}$; 4) 10; 5) 4; –4; 6) $6-4\sqrt{2}$; 7) 5. **12.6.** 1) 20; 2) $22 - \sqrt{464}$; 3) 0; 5. **12.7.** 2) 7; 8. **12.8.** 2) 1. **13.2.** 1) $[3; 5]$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1] \cup [0; 1)$; 4) $(4; +\infty)$; 5) $[-8; -4]$; 6) $(-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$. **13.3.** 1) $\left[\frac{2}{3}; 4\right)$; 2) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$; 3) $\varnothing$. **13.4.** 1) $\left(3; \frac{24}{5}\right]$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $[0; 3]$; 4) $[-1; 0) \cup (0{,}6; 1]$; 5) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 6) $[1; 6]$. **13.5.** 1) $\left[2\frac{2}{9}; 4\right) \cup (5; +\infty)$; 2) $(3; +\infty)$; 3) $[-2; -1{,}6] \cup [0; 2]$; 4) $\varnothing$. **13.6.** 1) $(-\infty; 1)$; 2) $[-7; 2]$; 3) $(-\infty; -1]$; 4) $\left[\frac{8}{3}; +\infty\right)$; 5) $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$; 6) $(3; 5]$. **13.7.** 1) $[-2; 2)$; 2) $[-7; 1)$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$. **14.4.** 3) 10π. **14.5.** 2) $\frac{9\pi}{2}$. **14.11.** 4) В III четверти; 8) во II четверти; 15) в IV четверти. **14.12.** 3) (0; –1); 5) (0; 1); 8) (1; 0). **14.13.** 2) (–1; 0); 5) (–1; 0). **14.14.** 3) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 4) 2π; -2π. **14.17.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **14.18.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **14.19.** 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 2) (0; –1); 3) (0; 1), (0; –1); 4) (1; 0), (–1; 0); 5) (1; 0). **14.22.** 1) –2; 2) $-\frac{4}{3}$. **14.23.** 80 000 жителей. **15.1.** 1) 5; 5) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; 6) –3; 7) $\frac{7}{4}$. **15.2.** 1) 1; 3) 0; 4) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 6) 9. **15.5.** 1) Да; 2) нет; 4) нет; 6) да. **15.6.** 1) Нет; 3) да. **15.7.** 1) 3; –3; 3) 3; 1; 5) 1; 0. **15.8.** 2) –1; –3; 4) 10; 4. **15.14.** 1) $-4 \leqslant a \leqslant -2$; 2) $a = 0$; 3) $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$; 4) $-1 \leqslant a \leqslant 0$ или $1 \leqslant a \leqslant 2$; 5) $1 \leqslant a \leqslant 2$ или $3 \leqslant a \leqslant 4$; 6) $a \neq 2$. **15.15.** 1) $1 \leqslant a \leqslant 3$; 2) таких значений a не существует; 3) $-2 \leqslant a \leqslant -\sqrt{2}$ или $\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 2$; 4) $a = 1$. **15.18.** 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[0,5; +\infty)$. **15.19.** 1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **16.4.** 1) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **16.5.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **16.6.** 1) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$; 2) 2; 3) 4. **16.7.** 1) $2-\sqrt{2}$; 2) 1,5; 3) $4\sqrt{3}-3$. **16.12.** 1) $2\sin\alpha$; 2) $-2\cos\alpha$; 3) 0. **16.13.** 1) 0; 2) 0; 3) $-2\operatorname{ctg}\beta$. **16.14.** 1) II; 3) I или II. **16.15.** 2) IV; 4) I или III. **16.16.** 1) Чётная; 3) не является ни чётной, ни нечётной; 6) нечётная. **16.17.** 2) Чётная; 4) не является ни чётной, ни нечётной; 6) нечётная. **16.18.** 1) 7; 2) 2. **16.19.** 1) $(-\infty; -2) \cup [-1; 6]$; 2) $[-6; 1] \cup (3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3) \cup (-3; -1) \cup (2; +\infty)$; 4) $[-2; 1] \cup \{3\}$. **17.1.** 3) $\sqrt{3}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 9) $\frac{1}{2}$. **17.2.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 1; 6) $\frac{1}{2}$; 8) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **17.9.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $[3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 4]$. **17.10.** 1) 7; 2) 3; 3) 1. **18.9.** 2) $\cos 20° > \cos 21°$; 4) $\cos\frac{10\pi}{9} < \cos\frac{25\pi}{18}$; 6) $\sin 2 > \sin 2{,}1$. **18.10.** 2) $\sin\frac{5\pi}{9} > \sin\frac{17\pi}{18}$; 4) $\cos\frac{10\pi}{7} > \cos\frac{11\pi}{9}$. **18.11.** 1) $\sin 58° > \cos 58°$; 2) $\sin 18° < \cos 18°$; 3) $\cos 80° < \sin 70°$. **18.12.** 1) Да; 2) нет. **18.21.** 1) 2; 2) функция не имеет нулей; 3) 1; 4) -2; 2. **18.22.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) 21. **19.5.** 2) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} < \operatorname{tg}\frac{7\pi}{15}$; 5) $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 1{,}5$; 8) $\operatorname{ctg}(-40°) < \operatorname{ctg}(-60°)$. **19.6.** 1) $\operatorname{tg} 100° > \operatorname{tg} 92°$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} > \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$; 6) $\operatorname{ctg}(-3) < \operatorname{ctg}(-3{,}1)$. **19.9.** 1) Нет. *Указание*. $\operatorname{tg} 80° > \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$; 2) нет; 3) да. **19.10.** 2) $\sin 40° < \operatorname{ctg} 20°$. **19.15.** $-2{,}5$; -1; 0,5; 2; 3,5. **19.16.** 64, 16, 4 или -64, 16, -4. **20.1.** 7) $2\cos^2\alpha$; 8) $-\sin^2\alpha$; 9) 1; 10) 2. **20.2.** 4) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 5) 1; 6) 1; 7) 1; 8) 4. **20.7.** 1) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 4) $\frac{1}{\sin x}$; 5) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 6) 1; 7) $\cos^2\alpha$; 8) $-\operatorname{ctg}\gamma$; 9) $\sin^4\alpha$; 10) 1; 11) $\frac{1}{\cos\alpha}$; 12) $\frac{1}{\cos\beta}$. **20.8.** 1) $\frac{2}{\sin^2\beta}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{\cos x}$; 4) $\frac{2}{\cos\beta}$; 5) $\operatorname{tg}^2\alpha$; 6) $\operatorname{tg}\alpha$; 7) -1; 8) $-\cos^2\alpha$. **20.9.** 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$. **20.10.** 1) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$; 4) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{50}}$, $\cos\alpha = -\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{7}$. **20.11.** 3) *Указание*. Рассмотрите разность левой и правой частей данного равенства и докажите, что она равна нулю. **20.15.** 1) $-\frac{1}{2}$. *Указание*. Разделите числитель и знаменатель данной дроби на $\cos\alpha$; 2) $\frac{1}{4}$. **20.16.** 1) $-\frac{16}{11}$; 2) $\frac{12}{7}$. **20.17.** 1) $\frac{b^2-1}{2}$. *Указание.* $b^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\frac{b(3-b^2)}{2}$; 3) $\frac{1+2b^2-b^4}{2}$. **20.18.** 1) b^2-2; 2) $b(b^2-3)$. **20.19.** 2; 1. **20.20.** 3; –2. **20.21.** 1) $-\sin\beta - \cos\beta$; 2) $-\sin\alpha\cos\beta$. **20.22.** $\frac{1}{\sin\alpha}$. **20.24.** 1) 125; 2) 2. **21.1.** 3) 0; 4) 0. **21.2.** 3) 0. **21.3.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\cos\beta$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\sin 2\beta$; 7) 1; 8) $\operatorname{tg} 15°$; 9) $\cos(\alpha-\beta)$. **21.4.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos 2\beta$; 6) $\cos(\alpha+\beta)$. **21.5.** $\frac{6}{7}$. **21.7.** 2) –1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **21.8.** 1) $\sqrt{3}$. **21.11.** $-\frac{31\sqrt{2}}{82}$. **21.12.** $-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. **21.13.** $-\frac{24}{25}$. **21.14.** $-\frac{297}{425}$. **21.15.** 2. **21.16.** 5. **21.17.** 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\sqrt{3}-2$. **21.18.** 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **21.21.** 1) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$; 2) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$; 3) $\cos 2\alpha$. **21.22.** 1) 1; 2) –1. **21.25.** 1) 2; 2) $\sqrt{2}$. **21.26.** 1) –2; 2) $-2\sqrt{2}$. **21.27.** 1) *Указание.* Из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ исключите точки, абсциссы которых равны $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **21.29.** При $x = 1$: 9, 6, 3; при $x = 9$: 41, 62, 83. **21.30.** При $x = 2$: 1, –3, 9; при $x = \frac{4}{3}$: $\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $\frac{25}{3}$. **22.3.** 3) $-\cos 38°$; 4) $-\sin\frac{\pi}{18}$. **22.4.** 3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; 4) $\sin\frac{\pi}{15}$. **22.7.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; 3) 1. *Указание.* Приведите каждую функцию к наименьшему положительному аргументу; 4) 1. **22.8.** 1) $3-2\sqrt{2}$; 2) 3; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 4) –1. **22.9.** 1) $-\cos\alpha$; 2) 1; 3) 1; 4) 2; 5) 2; 6) 1. **22.11.** 1) 1; 2) 0; 3) 0. **22.12.** 1) 1; 2) 0. **22.14.** 2. *Указание.* Так как $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{11} + \frac{5\pi}{22} = \frac{\pi}{2}$, то $\cos^2\frac{3\pi}{8} = \sin^2\frac{\pi}{8}$ и $\cos^2\frac{5\pi}{22} = \sin^2\frac{3\pi}{11}$. **22.15.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\frac{1}{\cos^2(10° + \alpha)}$. **22.16.** 1) $[-2; 0) \cup [5; +\infty)$; 2) $[-3; 2) \cup (2; +\infty)$; 3) $\left(\frac{3}{2}; 4\right]$. **22.17.** 1) 1; 2) 1. **23.3.** 1) $2\cos\alpha$; 2) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$; 4) $\sin 25°$; 5) $\cos\alpha + \sin\alpha$; 6) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 7) $\frac{1}{2}$; 8) $-\cos\frac{\alpha}{2}$; 9) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$; 10) $\sin 2\alpha$; 11) 1; 12) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$. **23.4.** 1) $2\sin 40°$; 2) $\cos^2 2\beta$; 3) 1; 4) $\cos 35° - \sin 35°$; 5) 1; 6) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; 7) $2\sin 2\alpha$; 8) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha$; 9) $-\sin 2\beta$; 10) $\sin 3\alpha$. **23.5.** 1) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}$;

5) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $2\sqrt{3}$. **23.11.** 2) $-4\sqrt{5}$. **23.12.** 2) $-\frac{24}{7}$. **23.16.** 1) 1; 2) $\operatorname{ctg} 4\alpha$. **23.17.** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$. **23.18.** –0,8. **23.19.** $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. **23.20.** $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{14}}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{7}}{7}$. **23.21.** 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 5) $-(1+\sqrt{2})$; 6) $\sqrt{2}-1$. **23.22.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 3) 2; 4) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 5) $\sin 4\alpha$; 6) $\sin 2\alpha$; 7) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 8) $\cos\alpha$. **23.23.** 1) $2\operatorname{ctg} 4\alpha$; 2) $\sin 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $4\sin\alpha$; 5) 1; 6) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **23.29.** $\frac{1}{2}$. **23.30.** $-\frac{1}{2}$. **23.31.** $-\frac{8}{9}$. **23.32.** $\frac{3}{4}$. **23.33.** 1) $\cos 4\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$; 3) $\sin 8\alpha$; 4) 1. **23.34.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $8\cos 2\alpha$; 3) $-\frac{1}{4}\sin^2\alpha$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$. **23.38.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha$. **24.4.** 1) $\frac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}$; 2) $\operatorname{tg} 6\alpha$; 3) 1. **24.7.** 1) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$. **24.8.** 1) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$; 3) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **24.13.** 1) 7; 2) –3; 3) –2; 4) 1. **24.14.** $8\sqrt[3]{2}$. **25.1.** 1) $\frac{1}{2}(\cos 20^\circ + \cos 10^\circ)$; 2) $\cos\alpha + \cos 5\alpha$; 3) $\sin\frac{3\pi}{40} + \sin\frac{\pi}{8}$; 4) $\frac{1}{2}(\cos 26^\circ - \cos 122^\circ)$; 5) $\cos\alpha - \cos 3\alpha$; 6) $\frac{2\cos 2\alpha + 1}{4}$. **25.2.** 1) $\cos\frac{3\pi}{40} + \cos\frac{13\pi}{40}$; 2) $\frac{1}{2}(\sin 52^\circ + \sin 4^\circ)$; 3) $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)$; 4) $\frac{2\cos 2\alpha - 1}{4}$. **25.3.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3\alpha$; 3) $\cos\alpha$; 4) 0,5. **25.5.** 1) $\cos\alpha$; 2) $\frac{1}{2}$. **25.7.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 1; 3) $-\sin 2\alpha$. **25.8.** 1) 1; 2) $\sin 2\alpha$. **25.11.** 1) *Указание.* Умножьте и разделите левую часть равенства на $2\sin\frac{\pi}{7}$. **25.13.** $y = 0{,}2x$. **25.14.** $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$. **26.3.** 2) $\pm\frac{\pi}{5} + \frac{12\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\pm 3\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **26.4.** 2) $\pm\frac{25\pi}{6} + 10\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{4\pi}{3} + \frac{8\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **26.5.** 3) $12 + 6\pi + 12\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24} \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **26.6.** 2) $\pm\frac{3\pi}{2} - 6 + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

26.7. $-\frac{\pi}{6}$. **26.8.** 3π. **26.9.** 4 корня. **26.10.** $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{31\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$. **26.11.** $a = \frac{1}{2}$. **26.12.** $a = 0$. **26.13.** 1) 1; 2) $a^{\frac{1}{4}} - ba^{-\frac{3}{4}}$. **26.14.** 1) $\left[0; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$; 2) $[-3; -2) \cup$ $\cup (-2; 3]$; 3) $[0; 4]$. **27.3.** 2) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{(-1)^{n+1}}{8}\arcsin\frac{2}{9} + \frac{\pi n}{8}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **27.4.** 3) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **27.5.** 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **27.6.** 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{5\pi}{6} + 20 + 5\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **27.7.** $\frac{13\pi}{12}$. **27.8.** $-\frac{13\pi}{90}$. **27.9.** 1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pi + 4\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **27.10.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **27.11.** $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$. **27.12.** 6 корней. **27.13.** $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 2$. **27.14.** $a = -4$ или $4 \leqslant a \leqslant 5$. **27.15.** 1) 5; 2) 3; 3) 7; 4) 4. **28.3.** 3) $-\frac{4\pi}{21} + \frac{4\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{1}{6}\operatorname{arcctg}\frac{6}{11} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.4.** 2) $\frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.5.** 2) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.6.** 3) $-\frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.7.** 4 корня. **28.8.** 1 корень. **28.9.** $-\frac{\pi}{4}$. **28.10.** $-\frac{2\pi}{3}$. **28.12.** 2) $y = -\sqrt{x+1}$. **29.3.** 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **29.4.** 5) 0. **29.7.** 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 3) $\boldsymbol{R}$; 4) $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$; 5) $[-2; +\infty)$; 6) $[1; +\infty)$. **29.8.** 1) $[-3; -1]$; 2) $[0; 1]$; 3) $[3; +\infty)$; 4) $\boldsymbol{R}$; 5) $(-\infty; -7) \cup (-7; +\infty)$; 7) $[0; 2]$. **29.9.** 1) π; 0; 2) $2 + \pi$; 2; 4) наибольшего значения не существует, наименьшее значение $\frac{1}{\pi}$. **29.10.** 1) 2π; π; 2) $\frac{\pi}{2} - 2$; $-\frac{\pi}{2} - 2$. **29.11.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2$; 2; 2) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; 0. **29.12.** 1) $\frac{\pi}{2} + 4$; 4; 2) $\sqrt{\pi}$; 0. **29.13.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{15}}{15}$. **29.14.** 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{12}{5}$. **29.15.** 1) $-\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{5}$; 2) 252; 3) $\frac{1}{2}$; -1; 4) $\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1-3\sqrt{5}}{2}$. **29.16.** $g(-1)$, $g(1)$, $f(2)$, $f(-5)$. **30.1.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\pm 4\arccos\frac{1}{3} + 8\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **30.2.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$,

$\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4}+3\pi n,\ 3\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right)+3\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **30.3.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}4+\frac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $-3\operatorname{arctg}5+3\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}4+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 7) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ 2\operatorname{arctg}2+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 8) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **30.4.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{4},\ n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $\operatorname{arctg}2+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **30.5.** 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ (-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pm\arccos\left(1-\sqrt{2}\right)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $2\pi n,\ \pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 6) $\pm 2\pi+6\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 7) $\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 8) $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ 2\pi+4\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 9) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 10) $\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z}$; 11) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\ \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{5},\ n\in \boldsymbol{Z}$; 12) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arcctg}2+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 13) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 14) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **30.6.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^n\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ 2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\pi+6\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 6) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \pi+4\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 9) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 10) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **30.7.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\ \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\frac{\pi n}{5},\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}3+\pi n,\ \operatorname{arctg}4+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 7) $\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **30.8.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **30.9.** $-\pi$. **30.10.** $-\frac{\pi}{2}$. **30.11.** $\frac{\pi}{4}$. **30.12.** $\frac{\pi}{2}$.

30.13. 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^n \arcsin\frac{1-\sqrt{10}}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **30.14.** 1) $\pm\arccos\frac{\sqrt{29}-2}{5}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **30.15.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}\frac{11}{5}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $2\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{5}\right)+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **30.16.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\operatorname{arctg}4+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $2\operatorname{arctg}2\sqrt{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **30.17.** 4 корня. **30.18.** 2π. **30.19.** $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}$. **30.20.** $\frac{\pi}{2}$. **30.21.** 1) $-1\leqslant a\leqslant 2$; 2) 3. **30.22.** 1) $-1\leqslant a\leqslant 2$; 2) таких значений a не существует. **30.24.** 3) -2; 4) 1. **31.1.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **31.2.** 1) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{4}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{4}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $\operatorname{arcctg}3+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **31.3.** 1) $\pm\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) πn, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{6}$, $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **31.4.** 1) $\frac{7\pi}{12}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **31.5.** 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\pi+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 5) πn, $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 7) πn, $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 8) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{2\pi n}{5}$, $\pi+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 9) $\frac{\pi n}{5}$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 10) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{21}+\frac{\pi n}{7}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **31.6.** 1) πn, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $2\pi n$, $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4}$, $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{5}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 7) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi n}{7}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 8) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **31.7.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$,

$\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $2\pi n$, $\frac{\pi}{4}+$ $+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 7) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* $\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1-\cos 8x}{2}=0$; 8) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 9) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **31.8.** 1) $\frac{\pi}{22}+\frac{\pi n}{11}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **31.9.** 1) $\left(-2; -\frac{1}{2}\right] \cup (2; +\infty)$; 2) $\left(-5; -\frac{7}{8}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **31.10.** 7 кг, 21 кг. **32.1.** 2) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n < x < \frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6}+\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $\pi n < x < \frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 9) $\pi - \arcsin\frac{1}{6}+2\pi n < x < 2\pi + \arcsin\frac{1}{6}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **32.2.** 2) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n < x < \frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < -\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n \leqslant x < \pi+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 10) $\operatorname{arcctg} 2+\pi n < x < \pi+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **32.3.** 1) $\frac{\pi}{6}+\pi n < x < \frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{5} < x < \frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **32.4.** 3) $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} < x < -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **32.5.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\pi n < x \leqslant$ $\leqslant \frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n < x < \frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{11\pi}{12}+\pi n < x < \frac{5\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\pi+4\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi+4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}+\pi n < x < \frac{3\pi}{8}+\frac{1}{2}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **32.6.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\pi n < x \leqslant \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{6}+4\pi n < x < \frac{11\pi}{6}+4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n < x < \frac{11\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{9\pi}{4}+3\pi n < x < -\frac{\pi}{4}+3\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{17\pi}{60}+\frac{\pi n}{2} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{30}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **32.7.** 1) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k \leqslant x < -\frac{\pi}{3}+2\pi k$,

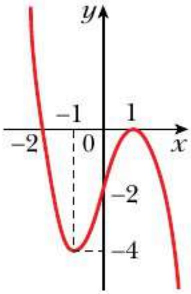
$\frac{\pi}{3}+2\pi k<x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k\leqslant x<\arcsin\frac{1}{4}+2\pi k,\ \pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi k<x\leqslant\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg}2+\pi k<x<\operatorname{arctg}3+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi k\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **32.8.** 1) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x\leqslant-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\leqslant x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k<x\leqslant\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\operatorname{arcctg}1{,}5+\pi k<x<\pi-\operatorname{arcctg}4+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **32.9.** 1) $[-3;-2)\cup(-2;1]$; 2) $(-\infty;1]\cup(2;4)\cup(4;+\infty)$; 3) $(-4;1]\cup\{3\}$. **32.10.** $\frac{3}{16}$. **33.9.** 1) $y=4x+19$; 2) $y=-3x-2$; 3) $y=7$. **33.10.** 1) 45°; 2) 135°; 3) 0°. **33.11.** 1) $y=x\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}$; 2) $y=-x\sqrt{3}+6+2\sqrt{3}$. **34.7.** 8 м/с. **34.8.** 1) 20 м/с; 2) 10 м/с. **34.9.** 1) 2,6; 2) 2. **34.10.** 1) 7; 2) 12. **35.6.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **35.7.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **35.8.** 1) 13,5; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{176}{3}$. **35.9.** 1) 5; 2) $\frac{3}{16}$. **35.10.** 1) $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$; 2) $f'(x)=-2x$. **35.11.** 1) $f'(x)=\frac{2}{x^3}$; 2) $f'(x)=2x+3$. **35.12.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) 1. **35.13.** 1) –32; 2) $\frac{1}{27}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) 1. **35.22.** 1) –1; 1; 2) 4; 3) 2; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **35.23.** 1) –2; 2) –27; 27; 3) –3; 3; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **35.24.** 1. Величина $s'\left(\frac{1}{2}\right)=1$ задаёт мгновенную скорость материальной точки в момент времени $t_0=\frac{1}{2}$. **35.25.** 12. **35.26.** 1. **35.27.** 7. **36.15.** $\frac{17}{9}$ м/с. **36.16.** 105 м/с. **36.19.** 1) $y'=\frac{9}{x^4}-\frac{9}{x^{10}}$; 2) $y'=\frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$; 3) $y'=\cos x\cos 2x-2\sin x\sin 2x$; 4) $y'=\frac{\sin(2x+5)}{\cos^2 x}+2\operatorname{tg}x\cos(2x+5)$; 5) $y'=\frac{3(1-x)\sin 3x-\cos 3x}{(x-1)^2}$; 6) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$; 7) $y'=(x+1)^2(x-2)^3(7x-2)$; 8) $y'=-\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$. **36.20.** 1) $y'=\frac{30}{x^7}-\frac{1}{x^2}-\frac{12}{x^3}$; 2) $y'=\frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$; 3) $y'=2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$; 4) $y'=(x-3)^3(x+2)^4(9x-7)$. **36.21.** 16 кг · м/с. **36.22.** 400 Дж. **36.23.** 7 м. **36.24.** 1) $y'=-6\cos^2 2x\sin 2x$; 2) $y'=\frac{\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)}{10\sqrt{\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)}}$;

3) $y' = 2\cos\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3} - 5\right)^5$. **36.25.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **36.27.** 1) $y = 4x - 8$; 2) $y = -4$; 3) $y = -x - 3$. **36.29.** $y = 9x + 18$. **36.30.** $y = 4x + 9$. **37.1.** 1) $y = x - 1$; 2) $y = -4x + 4$; 3) $y = \frac{2}{3}x + 3$; 4) $y = x$; 5) $y = -1$; 6) $y = 2x - \pi + 1$; 7) $y = x + 4$; 8) $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$. **37.2.** 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = -2x + 2$; 3) $y = -x + \frac{\pi}{2}$; 4) $y = -2x - \pi - 1$; 5) $y = -2{,}5x - 1{,}5$; 6) $y = 5x - 18$. **37.3.** 1) $y = -3x - 3$; 2) $y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{2}$. **37.4.** 1) $y = -5x + 2$; 2) $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$. **37.5.** 1) $y = 6x - 3$; 2) $y = 2x - 2$, $y = 2x + 2$. **37.6.** 1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; 2) $y = -3x + 9$, $y = 3x$. **37.7.** $(2; 7)$. **37.8.** $(1; 1)$, $(-1; -1)$. **37.9.** Касательные пересекаются. **37.10.** 1) $(4; -9)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{5}{4}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{12}; \frac{3}{2}\right)$; 4) $(5; 4)$, $(-1; -2)$. **37.11.** 1) $(0; 0)$; 2) $(0; -1)$, $\left(\frac{4}{3}; -\frac{23}{27}\right)$. **37.14.** 1) $y = -1$, $y = 3$; 2) $y = 1$, $y = -7$. **37.15.** $y = -5$, $y = \frac{17}{3}$. **37.16.** 1) $y = -x - 4$; 2) $y = 3x - 3$; 3) $y = 2x - 8$, $y = 2x + 19$. **37.17.** 1) $y = -7x - 9$; 2) $y = x + \frac{1}{4}$. **37.18.** Нет. **37.19.** Да, $x_0 = 0$. **37.20.** Да, $x_0 = 1$. **37.21.** 8. **37.22.** 2. **37.23.** 4) $(-9; -1) \cup (1; 3)$; 5) $[1; 3) \cup (3; 4]$; 6) $(-1; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$. **38.1.** 1) Возрастает на $[-2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2]$; 2) возрастает на $(-\infty; 0]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $[0; 1]$; 3) возрастает на $[-1; 7]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $[7; +\infty)$; 4) возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$; 5) возрастает на $\boldsymbol{R}$; 6) возрастает на $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2]$. **38.2.** 1) Возрастает на $(-\infty; 3]$, убывает на $[3; +\infty)$; 2) возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $[-3; 1]$; 3) возрастает на $[-2; 0]$ и $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2]$ и $[0; 2]$; 4) возрастает на $[-1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$. **38.3.** 1) Возрастает на $[0; 1]$ и $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$ и $[1; 2]$; 2) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$; 3) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$; 4) возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$, убывает на $[-3; 0)$ и $(0; 3]$; 5) возрастает на $[1; 3)$ и $(3; 5]$, убывает на $(-\infty; 1]$ и $[5; +\infty)$; 6) убывает на $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ и $(3; +\infty)$. **38.4.** 1) Возрастает на $[0; 2]$ и $[3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$ и $[2; 3]$; 2) возрастает на $(-\infty; 3]$, убывает на $[3; +\infty)$; 3) убывает на $(-\infty; 5)$ и $(5; +\infty)$; 4) возрастает на $(-\infty; -2]$ и $[10; +\infty)$, убывает на $[-2; 4)$ и $(4; 10]$; 5) возрастает на $(-\infty; 0)$ и $[2; +\infty)$, убывает на $(0; 2]$; 6) возрастает на $(-\infty; -2)$ и $(-2; 0]$, убывает на $[0; 2)$ и $(2; +\infty)$. **38.5.** $(-\infty; x_1]$ и $[x_2; x_3]$. **38.7.** $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$. **38.12.** 1) Возрастает на $\boldsymbol{R}$; 2) возрастает на $\boldsymbol{R}$; 3) возрастает на промежутках вида $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{3} + 2\pi k\right]$, убывает на

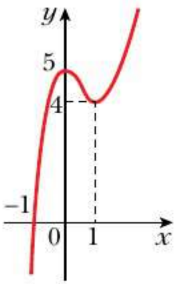
промежутках вида $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **38.13.** 1) Убывает на $\boldsymbol{R}$; 2) возрастает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **38.14.** 1) Возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -4]$; 2) возрастает на $[0; 3]$, убывает на $[3; 6]$. **38.15.** Возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$. **38.16.** $-\frac{1}{3}$. **38.17.** -4; 2. **39.6.** 1) $x_{\min} = 0$; 2) $x_{\min} = 3$; 3) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 4) $x_{\min} = -2$, $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = 0$; 5) $x_{\min} = 5$, $x_{\max} = -1$; 6) $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -1$, $x_{\max} = 1$. **39.7.** 1) $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -1$; 2) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 3) $x_{\max} = 2$; 4) $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -7$; 5) $x_{\min} = \frac{3}{2}$; 6) $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -\frac{1}{4}$, $x_{\max} = 1$. **39.9.** Ни одной. **39.10.** 1) Возрастает на $[6; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 6]$, $x_{\min} = 6$; 2) возрастает на $\left(-\infty; \frac{8}{5}\right]$ и $[2; +\infty)$, убывает на $\left[\frac{8}{5}; 2\right]$, $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = \frac{8}{5}$; 3) возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$. **39.11.** 1) Возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) возрастает на $(-\infty; -4]$ и $[0; +\infty)$, убывает на $[-4; 0]$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -4$. **39.14.** 1) Возрастает на $(-\infty; 0)$ и $[2; +\infty)$, убывает на $(0; 2]$, $x_{\min} = 2$; 2) возрастает на $(-\infty; 1]$ и $[3; +\infty)$, убывает на $[1; 2)$ и $(2; 3]$, $x_{\min} = 3$, $x_{\max} = 1$; 3) возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$, $x_{\max} = 0$; 4) возрастает на $\left[-\sqrt{6}; 0\right)$ и $\left[\sqrt{6}; +\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty; -\sqrt{6}\right]$ и $\left(0; \sqrt{6}\right]$, $x_{\min} = -\sqrt{6}$, $x_{\min} = \sqrt{6}$; 5) возрастает на $(0; 2]$, убывает на $(-\infty; 0)$ и $[2; +\infty)$, $x_{\max} = 2$; 6) возрастает на $(3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 3)$, точек экстремума нет; 7) возрастает на $(-\infty; -4)$ и $(-4; 0]$, убывает на $[0; 4)$ и $(4; +\infty)$, $x_{\max} = 0$; 8) возрастает на $[0; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$. **39.15.** 1) Возрастает на $(-\infty; -6]$ и $[2; +\infty)$, убывает на $[-6; -2)$ и $(-2; 2]$, $x_{\max} = -6$, $x_{\min} = 2$; 2) возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$, убывает на $[-3; 0)$ и $(0; 3]$, $x_{\max} = -3$, $x_{\min} = 3$; 3) возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 4) возрастает на $(-\infty; -1)$, убывает на $(-1; +\infty)$, точек экстремума нет; 5) возрастает на $[0; 4)$ и $(4; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -4)$ и $(-4; 0]$, $x_{\min} = 0$; 6) возрастает на $\left[\frac{1}{16}; +\infty\right)$, убывает на $\left[0; \frac{1}{16}\right]$, $x_{\min} = \frac{1}{16}$. **39.18.** 1) Убывает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, возрастает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x_{\min} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) возрастает на промежутках вида

$\left[-\frac{\pi}{3}+\pi k; -\frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{2\pi}{3}+\pi k\right]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **39.19.** 1) Возрастает на промежутках вида $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$, $x_{\max} = \frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x_{\min} = \frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) возрастает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{\pi}{8}+\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{7\pi}{8}+\pi k\right]$, $x_{\max} = \frac{\pi}{8}+\pi k$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{8}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **39.20.** –3; 3. **39.21.** –1; 1. **39.22.** 1) Возрастает на $\left[0; \frac{4}{5}\right]$, убывает на $(-\infty; 0]$ и $\left[\frac{4}{5}; 1\right]$, $x_{\max} = \frac{4}{5}$, $x_{\min} = 0$; 2) возрастает на $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, убывает на $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{1}{3}$; 3) возрастает на $[0; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 4) возрастает на $(-\infty; 2{,}5]$, убывает на $[2{,}5; 3)$, $x_{\max} = 2{,}5$. **39.23.** 1) Возрастает на $\left[-2; -\frac{8}{5}\right]$ и $[0; +\infty)$, убывает на $\left[-\frac{8}{5}; 0\right]$, $x_{\max} = -\frac{8}{5}$, $x_{\min} = 0$; 2) возрастает на $\left[0; \frac{2}{5}\right]$ и $[2; +\infty)$, убывает на $\left[\frac{2}{5}; 2\right]$, $x_{\max} = \frac{2}{5}$, $x_{\min} = 2$; 3) возрастает на $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$, убывает на $\left(1; \frac{7}{3}\right]$, $x_{\min} = \frac{7}{3}$. **39.24.** 1) –25; 2) –13; 3) –22. **39.25.** 1) 26; 2) 17; 3) –10. **40.1.** 1) 4; 0; 2) 13; 4; 3) –3; –30; 4) –4; –8. **40.2.** 1) 0; $-\frac{16}{3}$; 2) 1; –2; 3) 48; –6; 4) 0; –28. **40.3.** 1) 10; 6; 2) 5; $\sqrt{13}$; 3) 100; 0; 4) –2; –2,5. **40.4.** 1) 5; 3; 2) 2; –2; 3) 81; 0; 4) 10; 6. **40.5.** 1) $\sqrt{2}$; –1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{2+\pi\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2-\pi\sqrt{3}}{2}$. **40.6.** 1) 2; –1; 2) 2; –2. **40.7.** 8 = 6 + 2. **40.8.** 12 = 8 + 4. **40.9.** 1) $\frac{3}{2}$; 1; 2) –3; –4; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; –2. **40.10.** 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 0; 2) 4; –2. **40.11.** 180 = = 40 + 80 + 60. **40.12.** 18 = 8 + 3 + 7. **40.13.** 30 см^2. **40.14.** 8 см и $2\sqrt{3}$ см. **40.15.** $20\sqrt{2}$ см и $10\sqrt{2}$ см. **40.16.** $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ см, $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ см. **40.17.** 32. **40.18.** $12\sqrt{6}$. **40.19.** 16 см. **41.1.** См. рисунок. **41.2.** См. рисунок. **41.3.** См. рисунок. **41.4.** См. рисунок. **42.1.** 16) $(-\infty; -7) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$; 17) $(6; +\infty)$; 18) $(0; 3) \cup (3; 5)$.

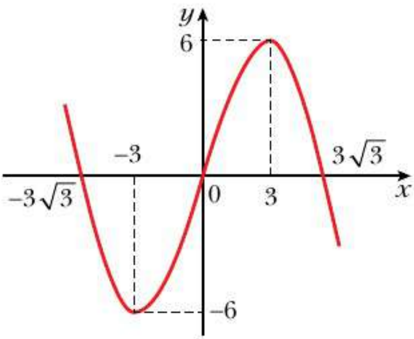
Рисунок к упражнению 41.1



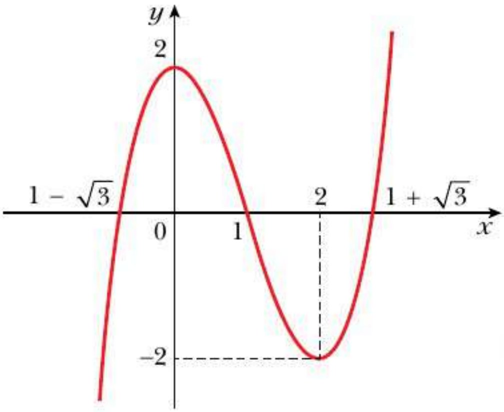
1)



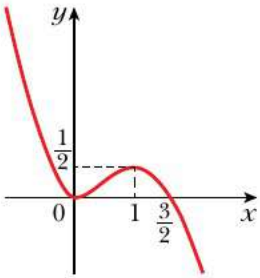
2)



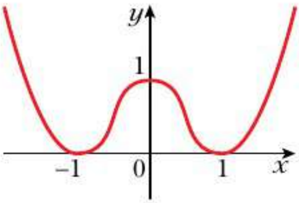
3)



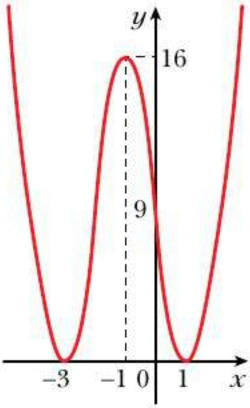
4)



5)



6)



7)

Рисунок к упражнению 41.2

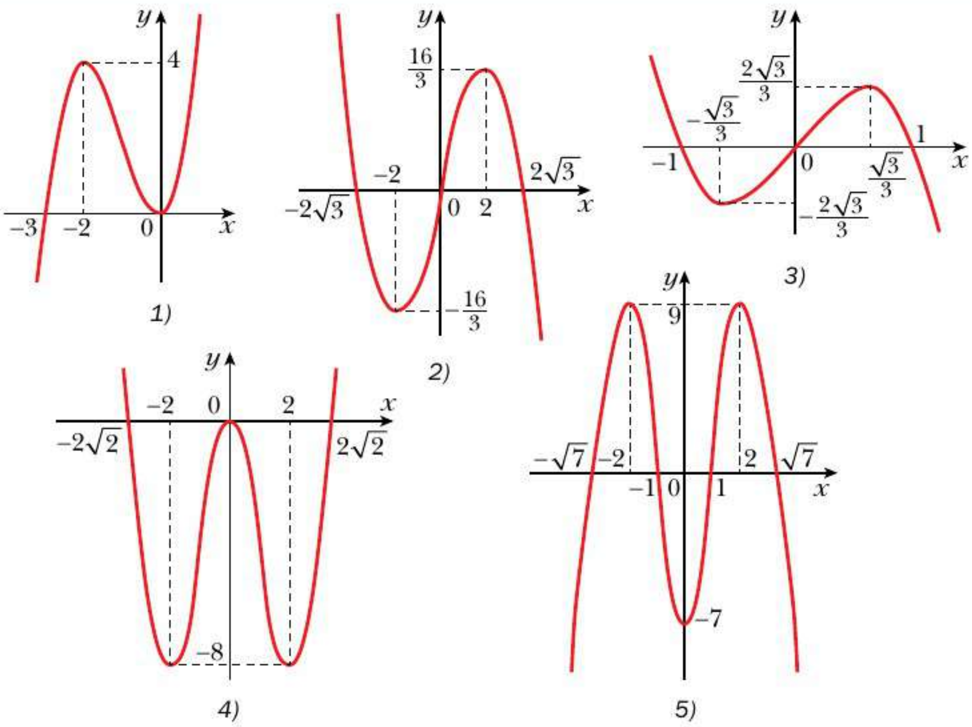


Рисунок к упражнению 41.3

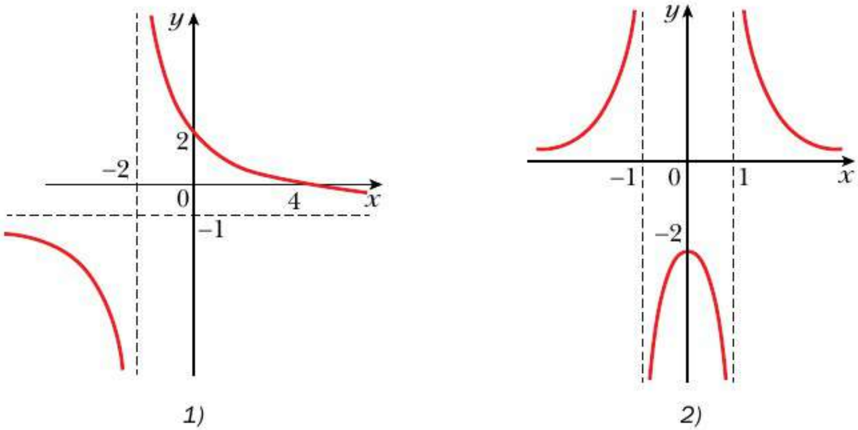
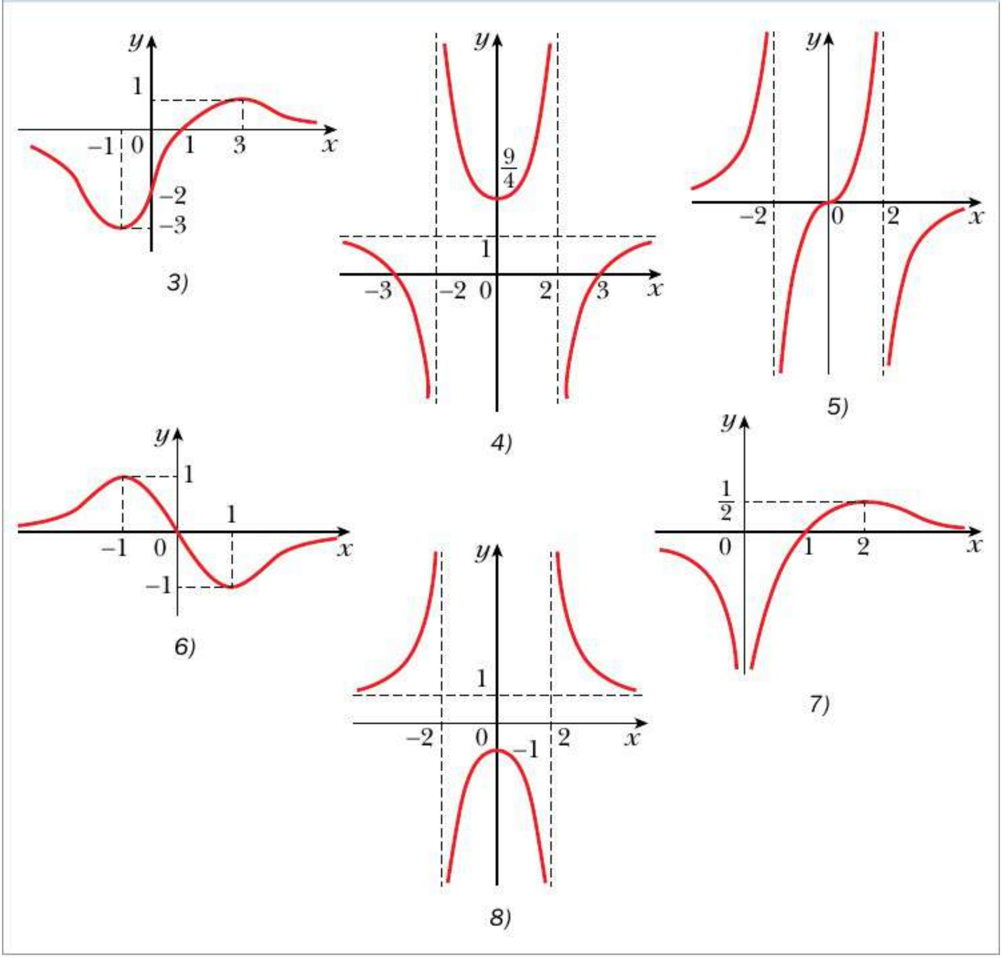
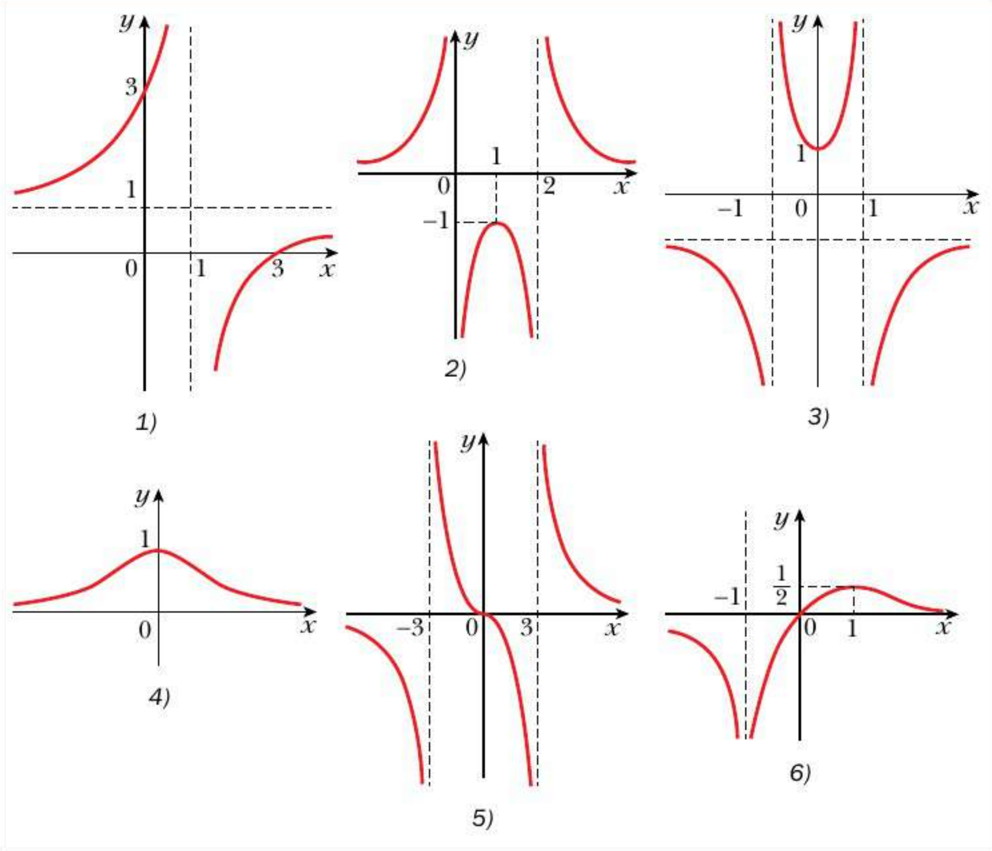


Рисунок к упражнению 41.3 (окончание)



42.14. 3) $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$; 6) $(-\infty; -3] \cup (1; 2]$; 7) $(-\infty; 1) \cup$ $\cup \left(\frac{5}{4}; 2\right) \cup (3; +\infty)$; 8) $\left(-2; -\frac{3}{2}\right] \cup (-1; 1]$. **42.15.** 1) $(-2; 5)$; 2) $\{-3\} \cup (-2; 5)$; 3) $[-2; 3) \cup (3; 5]$; 4) $(-2; 3) \cup (3; 5)$; 5) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup [2; +\infty)$; 6) $(0; 1) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$. **42.16.** 1) $\left[-3; -\frac{3}{2}\right) \cup \{2\}$; 2) $(4; +\infty) \cup \{-3, -1\}$. **42.17.** 1) 14; 2) -163; 3) $21\frac{1}{3}$; 4) 3; 5) 3; 6) -2. **42.28.** 5) $\frac{1}{3}$; 6) 67; 7) 14; 8) $-\frac{1}{12}$; 9) -1; 10) $1\frac{15}{16}$. **42.29.** 1) $\frac{8a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{27c}$;

Рисунок к упражнению 41.4



2) $\dfrac{256a^2b^2}{625c^{\frac{2}{3}}}$; 3) $\dfrac{1}{a^2b^2}$; 4) $\dfrac{a}{b}$. **42.31.** 1) 4; 2) 2; 3) 3; 4) −2; 5) $\dfrac{5}{4}$; 6) −2; 7) −12; 8) 2; 3; 9) $\dfrac{2}{9}$; 2. **42.32.** 1) 625; 2) 729; 3) 3; −25; 4) 9; 5) 5; 6) $-\dfrac{4}{3}$; $\dfrac{1}{3}$; 7) −1; 5; 8) $\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$; $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$; $\dfrac{-3-\sqrt{22}}{2}$; $\dfrac{-3+\sqrt{22}}{2}$. **42.33.** 2) 3. **42.38.** 1) $-\dfrac{3}{5}$; 2) $-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. **42.39.** 1) $\sin\alpha$; 2) $\cos^4\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $2\operatorname{tg}^2\alpha$. **42.40.** 1) 2; −3; 2) таких значений не существует. **42.41.** 1) 0; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **42.42.** −1. **42.44.** $\sqrt{2}$. **42.45.** 1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $2\sin 3\alpha$; 3) 2; 4) 0; 5) 1; 6) $\cos\alpha$; 7) 2; 8) $\dfrac{1}{4}\sin 8\alpha$. **42.47.** $\dfrac{\pi}{2}$. **42.48.** $-\dfrac{\pi}{24}$. **42.49.** 2 корня. **42.50.** 3) $-\sqrt{3}$; 4) 0. **42.51.** 1) [4; 6];

2) $\left[-4; -\sqrt{14}\right] \cup \left[\sqrt{14}; 4\right]$; 4]; 3) $[-2; +\infty)$. **42.52.** 1) $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$; 2) $(5 - 3\pi; 5)$. **42.53.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) корней нет; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **42.54.** 3) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 9) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 10) $2\pi k$, $-2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 11) πk, $\pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 12) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 13) $\frac{\pi k}{3}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 14) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 15) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 16) $\frac{\pi k}{2}$, $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **42.55.** $\frac{3\pi}{4}$; $2\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Ответы и указания к упражнениям из рубрики «Когда сделаны уроки»

Применение свойств функций

1. 2. **2.** (1; 1). **3.** $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$. **4.** 0. **5.** $a = 1$.

Примеры решения более сложных иррациональных уравнений и неравенств

1. 2; $\frac{-2 - 4\sqrt{13}}{3}$. **2.** –2; 1; 13. **3.** 1. *Указание*. Воспользуйтесь заменой $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = t$ или свойствами возрастающих и убывающих функций. **4.** 3. *Указание*. Замена $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} = y$. **5.** 3; $\frac{81 - 9\sqrt{97}}{8}$. *Указание*. Разделите обе части уравнения на x^2. **6.** 1; $\frac{1 + \sqrt{109}}{18}$. **7.** –2; 5. *Указание*. Пусть $\sqrt[3]{x+3} = a$, $\sqrt[3]{6-x} = b$. Тогда $a^3 + b^3 = 9$. **8.** –3; 4. **9.** $[-2; 4] \cup [5; +\infty)$. **10.** –2; 2. **11.** $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$. **12.** $[-4; 1] \cup \{2\}$. **13.** $(1; +\infty)$. **14.** $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}; +\infty\right)$.

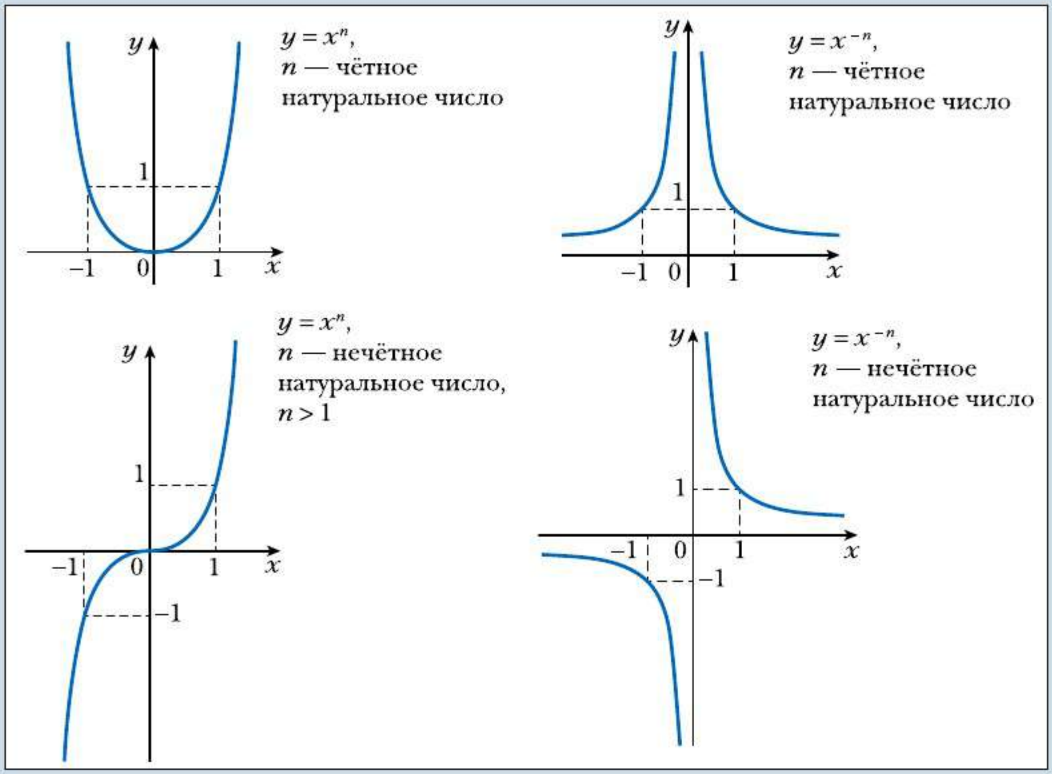
Применение производной для решения уравнений и доказательства неравенств

3. –1. **4.** 0. **5.** 0. **6.** $(1; +\infty)$. *Указание*. Докажите, что функция $f(x) = x^7 - 2x^4 + 3x - 2$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, причём $f(1) = 0$. **7.** $(-\infty; 1)$. **8.** (1; 1). *Указание*. Рассмотрите функцию $f(t) = t - \sin t$. Покажите, что эта функция возрастает на $\boldsymbol{R}$. Тогда из равенства $f(x) = f(y)$ следует, что $x = y$. **9.** (4; 4). **10.** 4. **11.** –3.

Алфавитно-предметный указатель

Оглавление

График степенной функции



Свойства корня n-й степени

Для любого действительного a выполняются равенства

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a; \quad \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$$

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Если $a \geqslant 0$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

Если $a \geqslant 0$, то $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$

Если $a \geqslant 0$, то $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

Свойства степени с рациональным показателем

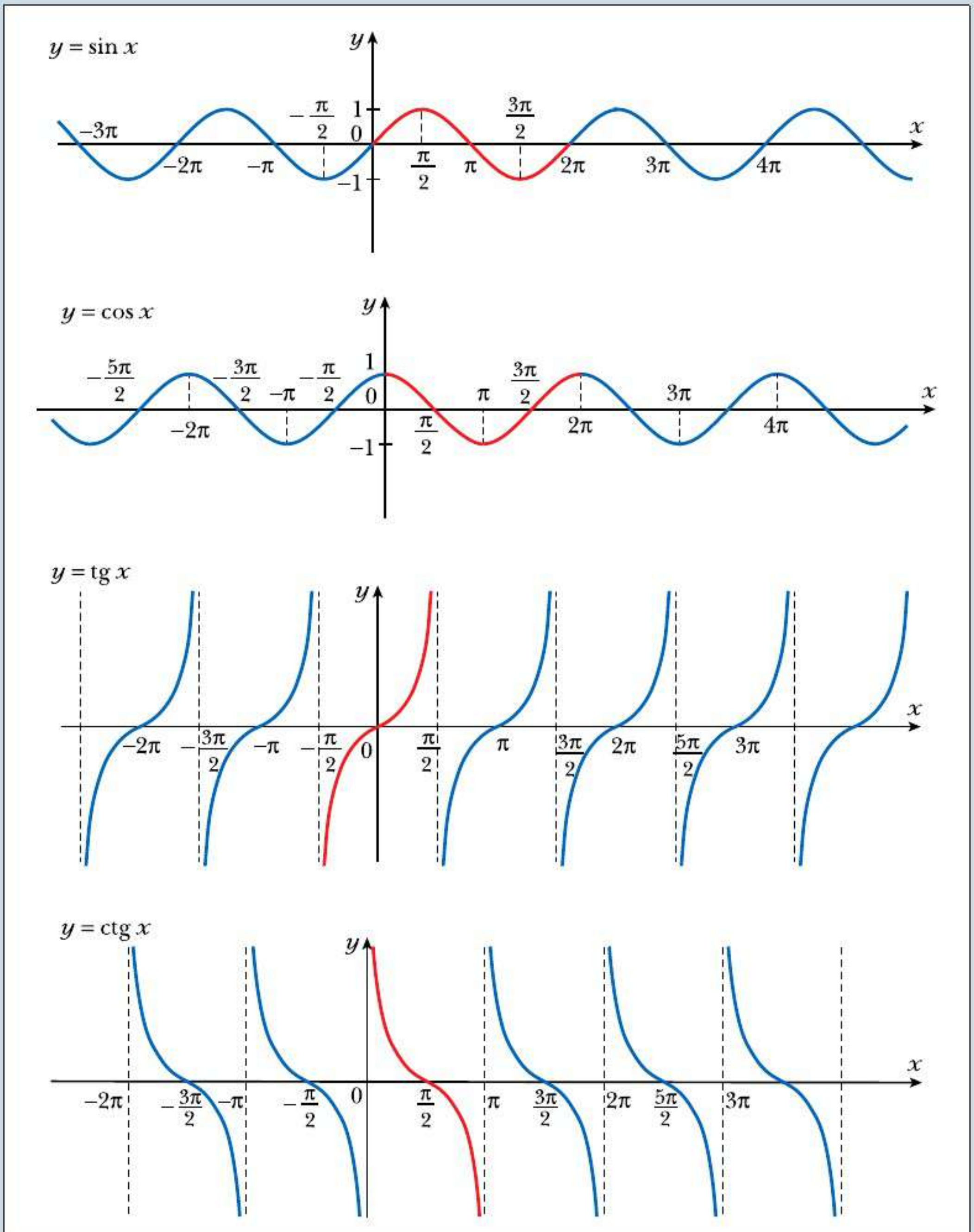
Если $a > 0$ и $b > 0$, то

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad a^p : a^q = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq} \qquad (ab)^p = a^p b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Графики тригонометрических функций



Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} \qquad \mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Формулы суммы и разности синусов (косинусов)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
0	0	1	0	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	—
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	—	0